Ein Rechenschieber

mit Teilung in gleiche Intervalle

auf der Grundlage der zahlentheoretischen Indizes.

(D.R.G.M.S. Nr. 344576.)

Für den Unterricht konstruiert

von

Dr. Joh. Schumacher,

Professor am Kgl. bayer. Kadettenkorps.

Mit 2 Tafeln.

München.

J. Lindauersche Buchhandlung (Schöpping).

1909.

Ein Rechenschieber

mit Teilung in gleiche Intervalle

auf der Grundlage der zahlentheoretischen Indizes.

(D.R.G.M.S. Nr. 344576.)

Für den Unterricht konstruiert

von

Dr. Joh. Schumacher,

Professor am Kgl. bayer. Kadettenkorps.

Mit 2 Tafeln.

München.

J. Lindauersche Buchhandlung (Schöpping).

1909.

K. b. Hof- und Universitätsbuchdruckerei von Junge & Sohn in Erlangen.

Vorrede.

Über die Verwendbarkeit meines Rechenstabes bin ich mir nicht im Unklaren, weil ich seine Vorteile und Nachteile im Vergleiche mit dem logarithmischen Schieber eingehend erwogen habe. Er wird sehr gute Dienste im Unterrichte der Volks- und Mittelschulen leisten und für die Einführung in das Gebiet der höheren Algebra und der Zahlentheorie auf den Seminarien der Hochschulen sich zweckdienlich erweisen. Es bleiben insbesondere wenige zahlentheoretische Untersuchungen übrig, die seine Brauchbarkeit ausschließen, da die technische Ausführung von der Wahl des Moduls unabhängig gemacht werden kann. In der Praxis des Technikers wird er den logarithmischen Rechenschieber nicht verdrängen. Hat man einmal die notwendige Vertrautheit mit den Gebrauchsregeln erlangt, so wird er mit der Zeit erfahrungsgemäß wertvoller als es bei der ersten Benützung scheinen möchte. Einen unverkennbaren Vorzug gewährt die Möglichkeit seiner Herstellung in der Form einer Scheibe, die bei dem logarithmischen Schieber ausgeschlossen ist. Daß man additive und subtraktive Operationen mit ihm ausführen kann, dürfte ihn empfehlen, erscheint mir aber nicht wesentlich.

Die nachfolgende Beschreibung ist mit Absicht auf breiter Basis angelegt, um auch dem reiferen Mittelschüler die Gelegenheit zum erfolgreichen Studium derselben zu geben.

Dr. Joh. Schumacher.

Einleitung.

Die Einrichtung der gebräuchlichsten Rechenstäbe (Rechenschieber) beruht auf der Theorie der Logarithmen. Man kann nun die Frage aufwerfen: „Gibt es ausser den Logarithmen nicht noch andere Größen, welche analogen Gesetzen unterworfen sind?“ Und wenn es solche gibt: „In welchem Umfange und mit welchem Vorteile lassen sich dieselben zur Konstruktion eines Rechenstabes verwenden?“ Die erste Frage ist sofort zu bejahen. Die Indizes spielen für die Zahlentheorie die analoge Rolle wie die Logarithmen für die Arithmetik. Die zweite Frage findet durch die Theorie der Indizes von selbst ihre Beantwortung.

Der Konstruktion eines Rechenstabes soll zunächst das Notwendigste aus der Zahlen- insbesondere Indizestheorie vorausgeschickt werden, soweit es hier einschlägig und für jeden, der sich mit dieser Disziplin weniger befaßt hat, verständlich ist.

§ 1.

Wenn der Unterschied zweier Zahlen a, b durch eine dritte Zahl p teilbar ist, nennt man a und b inbezug auf p kongruent; p heißt der Modul. Man schreibt $a \equiv b$ modulo p und liest a kongruent b modulo p. Der Ausdruck, daß zwei Größen für einen Modul kongruent sind, ist die Kongruenz. Zwei Zahlen, deren Unterschied durch den Modul nicht teilbar ist, heißen inkongruent. 2, 9, 16, . . . sind inbezug auf den Modul 7 kongruente Zahlen, dagegen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . . inkongruente Zahlen für den Modul 7.

Jede Zahl hat inbezug auf einen gegebenen Modul p einen positiven oder negativen Rest. Ersterer heißt der kleinste positive Rest, letzterer der absolut kleinste Rest.

Wenn $\frac{a}{p} = q + \frac{r}{p}$, so ist r der kleinste positive Rest.

Wenn $\frac{a}{p} = q + 1 - \frac{p-r}{p}$, so ist $-(p-r)$ der absolut kleinste Rest.

Beispiel: $\frac{29}{9} = 3 + \frac{2}{9}$; hier ist 2 der kleinste positive Rest.

$\frac{29}{9} = 4 - \frac{7}{9}$; hier ist -7 der absolut kleinste Rest.

In beiden Fällen gilt aber: $29 \equiv 2 \bmod 9$; $29 \equiv -7 \bmod 9$.

Eine Kongruenz kann wie eine Gleichung eine oder mehrere Unbekannte enthalten und inbezug auf diese vom 1., 2. . . . n. Grade sein.

Die Sätze über die Verbindung von Kongruenzen mit demselben Modul entsprechen jenen über die Verbindung von Gleichungen und folgen aus dem Grundbegriff $a \equiv b \bmod p$, d. h. $\frac{a-b}{p}$ ist eine ganze Zahl.

Einschlägig sind:

I. Wenn 2 Zahlen a und b für einen Modul p einer dritten Zahl c kongruent sind, so sind sie für denselben Modul einander kongruent.

II. Zwei oder mehrere Kongruenzen mit demselben Modul können gliedweise zu einander addiert oder voneinander subtrahiert werden.

III. Die Glieder einer Kongruenz können mit einer und derselben Zahl multipliziert werden.

IV. Zwei oder mehrere Kongruenzen mit demselben Modul können gliedweise miteinander multipliziert werden.

V. Eine Kongruenz bleibt richtig, wenn man beide Seiten auf dieselbe Potenz erhebt.

VI. Wenn die beiden Glieder a und b einer Kongruenz $a \equiv b \bmod. p$ einen größten gemeinschaftlichen Teiler d haben, der zum Modul p prim ist, so kann man dieselben durch d dividieren. Ist d aber auch in p restlos enthalten, so gilt die durch Division erhaltene Kongruenz nur noch für den Modul $\frac{p}{d}$.

§ 2.

Es sei p eine ungerade Primzahl und g eine Zahl, in welcher p nicht aufgeht. Kein Glied der Reihe

$$1,\ g,\ g^2,\ .\ .\ .\ g^{p-1}\ .\ .\ .$$

kann demzufolge den Rest 0 geben. Die Reste der aufeinanderfolgenden Potenzen von g müssen also mit den Zahlen der Reihe

$$1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ (p-1)$$

übereinstimmen; mithin gibt es zwischen 1 und p wenigstens eine Zahl n, für welche $g^n \equiv 1 \bmod. p$ ist. Die kleinste Zahl n jedoch, für welche

$$g^n \equiv 1 \bmod p$$

ist, nennt man den **Exponenten**, zu welchem g für den Modul p gehört. Z. B. $p = 11$; $g = 3$.

Die aufeinanderfolgenden Potenzen von g sind:

$$3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5,\ 3^6,\ 3^7,\ 3^8,\ 3^9,\ 3^{10}.$$

Dieselben ergeben für den Modul 11 die Reste

$$3,\ 9,\ 5,\ 4,\ 1,\ 3,\ 9,\ 5,\ 4,\ 1.$$

Die Zahl 3 gehört demnach zum Exponenten 5 für den Modul 11, weil keine niedrigere Potenz von 3 als die fünfte die Eigenschaft

$$3^5 \equiv 1 \bmod 11$$

besitzt. Von der fünften Potenz ab wiederholen sich die Reste in derselben Reihenfolge; deshalb kommt ihr eine besondere Bedeutung zu. Im vorliegenden Beispiel ist der Exponent, zu welchem $g = 3$ für den Modul $p = 11$ gehört, kleiner als $p-1$, d. i. $= 10$. Es kann aber der Fall eintreten, daß dieser Exponent gleich $p-1$ wird, daß also erst

$$g^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

ist, wie das nachfolgende Beispiel zeigt:

$$p = 11;\ g = 2.$$

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7,\ 2^8,\ 2^9,\ 2^{10}$$

$$2,\ 4,\ 8,\ 5,\ 10,\ 9,\ 7,\ 3,\ 6,\ 1 \text{ Reste mod } 11.$$

Die gleiche Eigenschaft wie die Zahl 2 haben auch noch die Zahlen 6, 7, 8 inbezug auf den Modul 11, während die Zahlen 3, 4, 5, 9 zum Exponenten 5, die Zahl 10 zum Exponenten 2 gehören.

Die Zahlen 2, 6, 7, 8 sind inbezug auf den Modul 11 ausgezeichnet, weil ihre zehn ersten Potenzen die Glieder der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots 10$$

bilden.

Um sie vor den übrigen Zahlen 3, 4, 5, 9, 10 zu charakterisieren, haben sie den Namen „primitive Wurzeln der Primzahl 11" erhalten, der für alle jene Zahlen g gilt, welche zum Exponenten p—1 gehören, oder was dasselbe sagt, für welche erst die $(p-1)^{te}$ Potenz von g und keine vorangehende kongruent 1 für den Modul p ist.

Die Bedeutung einer primitiven Wurzel liegt also darin, daß sie jede durch eine Primzahl p nicht teilbare Zahl durch eine Potenz einer primitiven Wurzel zu ersetzen gestattet.

Aus dem vorangehenden Beispiel für $p = 11$; $g = 2$ entnimmt man, daß 10 durch 2^5, 9 durch 2^6, 3 durch 2^8 etc. mod 11 ersetzt werden kann. Diese Eigenschaft leitet zum Begriffe der Indizes über.

§ 3.

Bedeutet z eine beliebige, durch p nicht teilbare Zahl, g eine primitive Wurzel von p und i den Exponenten, zu welchem z inbezug auf p gehört, besteht also die Kongruenz

$$z \equiv g^i \bmod p,$$

so ist bei gegebenem p und g die Zahl i in einfacher Weise zu finden, wenn z bekannt ist und umgekehrt. Jacobi nannte i den Index von z für den Modul p und die primitive Wurzel (Basis) g und stellte Tabellen auf, welche bei gegebenem p und g für jede Zahl den zugehörigen Index und für jeden Index die entsprechende Zahl liefern.

Wenn nun $g^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, dann besteht auch die Kongruenz 1. $g^{k(p-1)} \equiv 1 \bmod p$.

Ferner ist 2. $g^i \equiv z \bmod p$ nach Voraussetzung.

Durch Multiplikation von 1. und 2. folgt

$$g^{i+k(p-1)} \equiv z \bmod p,$$

d. h. jede Zahl $i + k(p-1)$, welche i nach dem Modul $p-1$ kongruent ist, kann als Index von z angesehen werden. In symbolischer Form:

$$\text{Ind } z \equiv i \bmod p-1.$$

Im Verfolge des früheren Beispieles hat man

Ind $10 \equiv 5 \bmod 10$; Ind $9 \equiv 6 \bmod 10$; Ind $3 \equiv 8 \bmod 10$ etc.

Nimmt man nun ferner an

$$z_1 \equiv g^{i_1},\ z_2 \equiv g^{i_2},\ z_3 \equiv g^{i_3} \ldots \bmod p,$$

dann ist mit diesen Kongruenzen äquivalent

$$\text{Ind } z_1 \equiv i_1,\ \text{Ind } z_2 \equiv i_2,\ \text{Ind } z_3 \equiv i_3,\ \ldots \bmod p-1.$$

Also $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \ldots z_n \equiv g^{i_1+i_2+i_3+\cdots i_n} \bmod p$.

$$\text{Ind } (z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \ldots z_n) \equiv (i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n) \bmod p-1.$$

Substituiert man für $i_1, i_2, i_3, \ldots i_n$ die gefundenen Werte, so resultiert

$$\text{Ind } (z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \ldots z_n) \equiv \text{Ind } z_1 + \text{Ind } z_2 + \text{Ind } z_3 + \ldots + \text{Ind } z_n \bmod p-1,$$

d. h. der Index eines Produktes ist der Summe der Indizes der einzelnen Faktoren nach dem Modul p—1 kongruent.

Wird $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_n = z$, so geht die letzte Formel über in

$$\text{Ind } (z^n) \equiv n \text{ Ind } z \bmod p-1,$$

d. h. der Index der n^{ten} Potenz einer Zahl ist dem nfachen des Index der Zahl nach dem Modul p—1 kongruent.

Die Verbindung dieser beiden Resultate führt zu den weiteren Sätzen, welche die Auflösung der binomischen Kongruenz

$$ax^n \equiv b \bmod p$$

gestatten.

$$\text{Ind } a + n \text{ Ind } x \equiv \text{Ind } b \bmod p-1$$

$$n \text{ Ind } x \equiv \text{Ind } b - \text{Ind } a \bmod p-1.$$

$$\text{Ind } x \equiv \frac{1}{n} \cdot (\text{Ind } b - \text{Ind } a) \bmod p-1, \text{ d. h.}$$

a) der Index eines Bruches ist dem Index des Zählers weniger dem Index des Nenners nach dem Modul p—1 kongruent $(n = 1)$,

b) der Index einer Wurzel ist dem n^{ten} Teile vom Index des Radikanden nach dem Modul p—1 kongruent.

§ 4.

Aus der vorangehenden, ihrem Wesen nach bekannten Theorie der Indizes geht hervor, daß dieselbe für die Zahlentheorie ganz analoge Gesetze enthält wie die Logarithmen für die Arithmetik.

Demzufolge können auch die Indizes in ähnlicher Weise zur Konstruktion eines Rechenstabes benutzt werden wie die Logarithmen. Zugleich aber findet die eingangs gestellte zweite Frage: „In welchem Umfange eignen sich dieselben zur Konstruktion eines Rechenstabes?“ dahin ihre Beantwortung:

„Mit dem auf die Theorie der Indizes basierten Rechenstab „kann man das Multiplizieren und Potenzieren von ganzen Zahlen „und Dezimalbrüchen ausführen. Zum Dividieren und Radizieren „ist er nur dann praktisch verwendbar, wenn die Division aufgeht, „resp. die Wurzel rational ist, weil nur unter dieser Voraussetzung „die Kongruenzen

$$x \equiv \frac{b}{a} \bmod p$$

$$x \equiv \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \bmod p$$

„einen Sinn haben. Ferner ist zu beachten, daß ein derartiger „Rechenstab nur Resultate liefert, welche zu den gesuchten kon„gruent sind, also erst durch Einschränkungen (Ungleichungen) zu „den wirklichen Resultaten führen.“

Innerhalb der Grenzen seiner Verwendbarkeit für Mittelschulen im besonderen genügt die Kenntnis einiger Lehrsätze über die Auflösung von Kongruenzen ersten Grades. Mit diesen werden sich alle Operationen, die man mit dem Rechenstabe vornehmen kann, in einfacher Weise erklären lassen.

α) Die Kongruenz $ax \equiv b \bmod p$ hat nur eine Lösung, wenn a zu p prim ist.

Z. B. $5x \equiv 3 \bmod 7$; 5 ist prim zu 7.

Keines der Produkte $5 \cdot 1$, $5 \cdot 2$, $5 \cdot 3$, $\ldots 5 \cdot 6$ ist durch 7 restlos teilbar; sie sind auch für den Modul 7 sämtlich inkongruent, liefern also verschiedene Reste, die mit den Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 übereinstimmen; und zwar ist jedes der obigen 6 Produkte nur einer einzigen Zahl der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 kongruent. In dieser Reihe befindet sich auch 3, der Rest der gegebenen Kongruenz. $5 \cdot 2 \equiv 3 \bmod 7$ ist die einzige Lösung. a ist immer prim zu p, wenn der Modul eine Primzahl ist.

β) Die Kongruenz $ax \equiv b \bmod p$ hat keine Wurzel, wenn der größte gemeinschaftliche Teiler d von a und p nicht auch in b aufgeht,

Z. B. $4x \equiv 3 \bmod 6$.

Oder $4x = 3 + 6y$.

$4x - 6y = 3$.

Dividiert man beide Seiten der Gleichung mit dem größten gemeinschaftlichen Teiler von 4 und 6, d. i. 2, so resultiert

$$2x - 3y = \frac{3}{2}.$$

Nun ist die linke Seite eine ganze Zahl, die rechte ein Bruch. Die Gleichung, daher auch die Kongruenz, ist unmöglich.

γ) Die Kongruenz $ax \equiv b \bmod p$ hat d inkongruente Wurzeln, wenn der größte gemeinschaftliche Divisor d von a und p auch in b restlos enthalten ist.

Z. B. $12x \equiv 8 \bmod 28$.

Größter gemeinschaftlicher Teiler von 12 und 28 ist 4; derselbe ist auch in 8 restlos enthalten. Durch Division mit 4 erhält man die Kongruenz

$$3x \equiv 2 \bmod 7.$$
$$x \equiv 3.$$

Die vorgelegte Kongruenz hat also die 4 Wurzeln in Bezug auf den Modul 28:

$$x_1 \equiv 3;\ x_2 \equiv 3 + 7 = 10;\ x_3 \equiv 3 + 14 = 17;$$
$$x_4 \equiv 3 + 21 = 24 \bmod 28.$$

§ 5.

Nach diesen Darlegungen aus dem Gebiete der Zahlentheorie kann man zur Konstruktion des Rechenstabes selbst schreiten.

Den Ausgangspunkt bildet die Wahl des Moduls und einer primitiven Wurzel desselben.

Primitive Wurzeln besitzen aber nur die Primzahlen und von den zusammengesetzten Zahlen jene, welche sich durch eine Potenz einer ungeraden Primzahl oder durch das Doppelte einer Potenz einer ungeraden Primzahl darstellen lassen; außerdem noch die Zahl 4. Daher folgt:

1. Man kann als Modul p irgend eine Primzahl wählen. Je größer dieselbe ist, desto verwendbarer ist der Rechenstab.
2. Es erscheint wünschenswert, daß p die Zahl 10 als primitive Wurzel hat.
3. p soll keine allzugroße Zahl sein, damit der Rechenstab eine handliche Form erhält, p darf aber auch nicht zu klein genommen werden, damit er möglichst große Zahlen unmittelbar abzulesen gestattet.
4. Beliebige Vielfache von p und p—1 sollen rasch angegeben werden können.

Einen großen Teil der Eigenschaften vereinigt die Zahl **101** in sich, weshalb dieser Modul für die technische Ausführung (§ 9) gewählt wurde. Für kleinere Rechnungsoperationen empfiehlt sich auch die Primzahl 11.

Die nachfolgende Konstruktion des Stabes bleibt aber dieselbe, welchen Modul man auch wählen, oder von welcher primitiven Wurzel dieses Moduls man ausgehen mag, da der Übergang von einem Indexsystem für die primitive Wurzel g zu einem andern für die primitive Wurzel g_1 bei gleichem Modul in der nachstehend einfachen Weise zu erledigen ist.

Wenn $z \equiv g^i \bmod p$ und $z \equiv g_1{}^y \bmod p$, so ist auch

$$g_1{}^y \equiv g^i \bmod p.$$

Also $y \equiv i$ Ind. g für die primitive Wurzel $g_1 \bmod p-1$.

Der Modul 101.

§ 6.

Derselbe hat die primitiven Wurzeln:

2, 3, 7, 8, 11, 12, 15, 18, 26, 27, 28, 29, 34, 35, 38, 40, 42, 46, 48, 50, 51, 53, 55, 59, 61, 63, 66, 67, 72, 73, 74, 75, 83, 86, 89, 90, 93, 94, 98, 99.

Die Indizes (İ) für die 100 ersten Potenzreste (N) der primitiven Wurzel 2 ergeben sich aus nachstehender Tabelle, die aus praktischen Gründen jedem Stabe beigegeben werden kann.

İ

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		0	1	69	2	24	70	9	3	38
1	25	13	71	66	10	93	4	30	39	96
2	26	78	14	86	72	48	67	7	11	91
3	94	84	5	82	31	33	40	56	97	35
4	27	45	79	42	15	62	87	58	73	18
5	49	99	68	23	8	37	12	65	92	29
6	95	77	85	47	6	90	83	81	32	55
7	34	44	41	61	57	17	98	22	36	64
8	28	76	46	89	80	54	43	60	16	21
9	63	75	88	53	59	20	74	52	19	51
10	50									

In der ersten Horizontalreihe stehen die Einer, in der ersten Vertikalreihe die Zehner der Potenzreste (Numeri). Der zu einem gegebenen Numerus gehörige Index steht dort, wo sich die Vertikalreihe der Einer und die Horizontalreihe der Zehner des Numerus treffen. Z. B. zur Zahl 67 gehört der Index 81, zur Zahl 15 der Index 93 u. s. f.

Wollte man eine ähnliche Tabelle für die primitive Wurzel 3 des Moduls 101 ableiten, so müßte man nach § 2 und § 5 die Kongruenz auflösen:

$$3^y \equiv 2^i \bmod 101$$

$$y \equiv i \text{ Ind } 2 \text{ für die primitive Wurzel } 3 \bmod 100$$

Nun ist $2 \equiv 3^{29} \bmod 101$; also

$$y \equiv 29 i \bmod 100.$$

Demzufolge erhält man alle Indizes für die primitive Wurzel 3, wenn man die Indizes für die primitive Wurzel 2 (siehe Tabelle) mit 29 multipliziert und das Produkt mod. 100 nimmt.

Beispiel: $3^y \equiv 2^5 \bmod 101$.

$$y \equiv 29.5 \bmod 100 \equiv 45 \bmod 100$$

Also $3^{45} \equiv 2^5 \bmod 101$.

§ 7.

Die Zahlen 1, 10^4, 10^8 ... geben durch 101 dividiert den Rest $+1$, die Zahlen 10^2, 10^6, 10^{10}, den Rest -1.

Allgemein: Da $10^{4n} \equiv +1 \bmod 101$ und $10^{4n+2} \equiv -1 \bmod 101$, können die Reste aller Zahlen mod 101 sehr einfach abgeleitet werden. Man teilt die dekadische Zahl von rechts nach links in Gruppen von je 2 Ziffern und bildet die Summe der ungradstelligen und der gradstelligen Gruppen. Der Unterschied beider Gruppen, genommen nach dem Modul 101, liefert den Rest der vorgegebenen Zahl. Ist dieser 0 oder ein Vielfaches von 101, so ist die Zahl restlos teilbar.

Beispiel: $875\,969 = 87\cdot(101-1)^2 + 59\cdot(101-1) + 69$
$= 87\cdot 101^2 - 115\cdot 101 + 87 - 59 + 69$
$875\,969 \equiv (87-59+69) \bmod 101 \equiv 97 \bmod 101.$

Beispiel: $19\,669 = 1\cdot(101-1)^2 + 96\cdot(101-1) + 69$
$= 1\cdot 101^2 + 94\cdot 101 + 1 - 96 + 69$
$19\,669 \equiv (1-96+69) \bmod 101 \equiv -26 \bmod 101 \equiv 75 \bmod 101.$

§ 8.

Ist m eine beliebige Zahl, so kann das Produkt $m\cdot 101$ leicht abgeleitet werden. Umgekehrt: Aus $m\cdot 101$ ist m einfach zu bestimmen.

α) Das Produkt ist dreizifferig.

$p\cdot 101 = p\,0\,p$ (in dekadischer Anschreibung.)

β) Das Produkt ist vierzifferig.

$pq\cdot 101 = (10p+q)\cdot 101 = (10p+q)\cdot 100 + (10p+q) = pqpq.$

γ) Das Produkt ist fünfzifferig.

$pqs\cdot 101 = (100p + 10q + s)\cdot 101 = 10\,000p + 1000q + 100(p+s) + 10q + s = pq\,(p+s)\,qs.$

δ) Das Produkt ist sechszifferig.

$pqst\cdot 101 = (1000p + 100q + 10s + t)\cdot 101 = 100\,000p + 10\,000q + 1000(p+s) + 100(q+t) + 10s + t = pq\,(p+s)\,(q+t)\,st.$

u. s. f.

Ist umgekehrt das ausgerechnete Produkt $m\cdot 101$ gegeben und soll m gefunden werden, so sind 1, 2, 3, ... n—2 Bedingungsgleichungen aufzustellen, je nachdem das Produkt $m\cdot 101$ eine 3, 4, 5, ... n zifferige Zahl ist.

Es seien a, b zwei beliebige, ganze Zahlen und $a\cdot b \equiv r \bmod 101$, dann ist $ab - r \equiv o \bmod 101$ eine durch 101 restlos teilbare Zahl von der Form pop, pqpq, $pq(p+s)qs$, $pq(p+s)(q+t)\,st$, u. s. f., je nachdem ab—r eine 3, 4, 5, 6 ... zifferige Zahl bedeutet. Nimmt man nun an, daß sowohl $a\cdot b$ als auch r auf irgend eine Art gefunden sei, so wird man ab—r nur mit der entsprechenden der obigen Zahlenformen zu identifizieren haben, um die Größen p, q, s, t, ... selbst zu erhalten.

Beispiel: $8\cdot 97 = 776$
$776 \equiv (76-7) \bmod 101 \equiv 69 \bmod 101$
$776 - 69 = 707$
707 hat die Form pop; also ist $p = 7$ und $8\cdot 97 = 7\cdot 101 + 69.$

Beispiel: $65\cdot 87 = 5655$
$5\,655 \equiv (156-56) \bmod 101 \equiv 100 \bmod 101$
$5\,655 - 100 = 5\,555$
5 555 hat die Form pqpq; also ist $pq = 55$ und $65\cdot 87 = 55\cdot 101 + 100.$

Beispiel: $349\cdot 78 = 27\,222$
$27\,222 \equiv (2 + 22 - 72) \bmod 101 \equiv -48 \bmod 101 \equiv 53 \bmod 101.$
$27\,222 - 53 = 27\,169$
27 169 hat die Form $pq(p+s)qs$; also ist $p = 2$, $qs = 69$ und $349\cdot 78 = 269\cdot 101 + 53.$

Beispiel: $499\cdot 386 = 192\,614$
$192\,614 \equiv (19 + 14 - 26) \bmod 101 \equiv 7 \bmod 101$
$192\,614 - 7 = 192\,607;$
192 607 hat die Form $pq(p+s)(q+t)st$,
also ist $pq = 19$; $st = 07$ und
$499\cdot 386 = 1\,907\cdot 101 + 7 = 192\,614$

Beispiel: $1000\cdot 999 = 999\,000$
$999\,000 \equiv (99-90) \bmod 101 \equiv 9 \bmod 101$
$999\,000 - 9 = 998\,991$

998991 hat die Form pq(p + s) (q + t)st; also ist pq = 98, st = 91 und 999000 = 9891 · 101 + 9. (Man beachte, daß pq nicht 99 ist, wie es auf den ersten Blick zu sein scheint.) u. s. f.

Wegen ihres häufigen Vorkommens werde die aus der letzten Ziffer oder den 2 letzten Ziffern von a · b — r gebildete Zahl **Ergänzungszahl** genannt.

Endlich sind die Produkte, welche kleiner als 100 oder gleich 100 sind, an dem Apparate unmittelbar abzulesen, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird.

Es sind diese:

2 × 50, 49, 48, ... 2
3 × 33, 32, 31, ... 3
4 × 25, 24, 23, ... 4
5 × 20, 19, 18, ... 5
6 × 16, 15, 14, ... 6
7 × 14, 13, 11, ... 7
8 × 12, 11, 10, ... 8
9 × 11, 10, 9
10 × 10.

§ 9.

Technische Ausführung.

Die technische Ausführung kann zweierlei Formen haben:

α) Die stabförmige,
β) Die scheibenförmige.

Die erstere ist übersichtlicher, die letztere praktischer. Bei der Scheibe ist zu jeder einzelnen Operation nur eine Drehung notwendig, bei dem Stabe sind oft zwei Verschiebungen erforderlich.

α) Die stabförmige. (Siehe Tafel 1.)

Ein hölzerner Stab hat als Grund- und Deckfläche zwei Rechtecke, während seine Randflächen gleichschenklige Trapeze sind. Das obere Rechteck hat eine Länge von 34 cm, eine Breite von

3,0 cm, das untere Rechteck eine Länge von 34,50 cm, eine Breite von 3,50 cm. Die Dicke des Stabes beträgt 1 cm. Die Abschrägung beläuft sich daher nach allen Seiten bei 1 cm Dicke auf 0,25 cm. An seinem linken Ende ist der Stab auf eine Länge von 3,5 cm auf die Hälfte seiner Dicke reduziert, damit ein Schieber sich beliebig weit nach beiden Seiten bewegen lassen kann. Dieser Schieber hat eine Länge von 30 cm, eine Breite von 1,6 cm und eine Dicke von 0,5 cm. An seinen beiden Längsseiten trägt er eine Nabe. Die beiden Naben gleiten in Nuten und gestatten die Bewegung des Schiebers auch in umgedrehter Lage. Die Deckfläche von Stab und Schieber bilden jedesmal eine Ebene. Der Schieber ist in den Stab so eingepaßt, daß sein oberer Rand einen Parallelstreifen von 0,7 cm, sein unterer Rand einen Parallelstreifen von 0,7 cm am Stabe übrig läßt, dessen Gesamtbreite demnach durch den Schieber in die Abschnitte 0,7; 1,6; 0,7 cm geteilt ist. Eine gedachte Linie zerlegt die ganze Schieberoberfläche in zwei gleichbreite Parallelstreifen. Stab und Schieber sind in 100 gleiche Teile eingeteilt. Die einzelnen Intervalle der beiden untern Parallelstreifen (der untere des Schiebers und der untere des Stabes) sind in 5 gleiche Teile geteilt. Die Teilstriche sind behufs einer übersichtlicheren Ablesung von verschiedener Länge. Die Einerlinien sind kürzer als die Fünferlinien und diese wieder kürzer als die Zehnerlinien.

An die obern Teilstriche sind die Numeri, das sind die ersten hundert Potenzreste der primitiven Wurzel 2 mod 101 zweimal geschrieben. Die Numerireihen sind am Anfange durch die Buchstaben N_1 und N_2 bezeichnet.

An die untern Teilstriche sind die Indizes, das sind die aufeinanderfolgenden Zahlen von 0—99 der natürlichen Zahlenreihe ebenfalls zweimal geschrieben. Die Indizesreihen sind am Anfange durch die beiden Buchstaben $\dot{I}_1$ und $\dot{I}_2$ gekennzeichnet.

Am linken Ende des Stabes befindet sich die Indizestafel, wie sie in § 6 beschrieben worden ist. Diese Tabelle wird durch ein Rechteck von ca. 11 · 2,8 mm Länge und ca. 12 · 2,8 mm Breite gebildet und besteht aus 132 Quadraten. Um eine Verkürzung des Stabes zu erzielen, kann die Indextafel auch weggelassen werden.

Die Kehrseite des Schiebers soll zur Aufnahme von Tabellen für einen beliebigen Modul, die jedem Exemplar beigegeben und auf ihm befestigt werden können, oder auch zur Aufnahme des logarithmischen Schiebers bestimmt sein. Die Längsränder des Stabes sind mit Zentimeter- ev. Millimetereinteilung versehen. Seine Unterseite dient zur Aufnahme wichtiger Konstanten und Formeln.

β) Die scheibenförmige. (Siehe Tafel 2.)

An Stelle des Stabes tritt eine Scheibe mit einer Rinne, an Stelle des Schiebers ein Kreisring. Die Deckfläche der Scheibe hat einen Radius von 6,75 cm; der Radius der Grundfläche ist 7 cm. Die Scheibendicke beträgt 1 cm. Der Radius des äußern Randes der Rinne mißt 6 cm, des innern 4,7 cm; die Tiefe 0,5 cm. In der Rinne läßt sich mittels eines abnehmbaren Stiftes ein Kreisring von 0,5 cm Materialstärke und 1,3 cm Breite bewegen. Auch bei der Umkehrung des Ringes muß seine Drehung leicht von statten gehen. Die Einteilung ist im wesentlichen die gleiche wie die des Stabes, also hundertteilig. Die Teillinien laufen radial. Der äußere Ring der Scheibe trägt die ersten hundert Potenzreste der primitiven Wurzel 2 mod 101 an seinen Teilstrichen. Auch die Oberfläche des beweglichen Ringes wird in 100 gleiche Teile zerlegt; an den äußern Teilstrichen stehen die nämlichen Potenzreste; an den innern Teilstrichen die aufeinanderfolgenden Zahlen von 0—99, deren Intervalle in 5 gleiche Teile geteilt sind. Um sich ein klares Bild von der Scheibe zu machen, braucht man sich den Stab nur kreisförmig zusammengelegt zu denken. Die Zahlenreihen $\dot{N}_1$, $\dot{N}_2$, $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ behalten dabei ihre Bedeutung. Die Indextafel ist als Rechteck eingezeichnet; sie hat eine Breite von $11 \times 5{,}0$ mm, eine Länge von $12 \times 4{,}0$ mm. Über dem Buchstaben $\dot{I}$ beginnt die Reihe der Numeri und der Indizes. Die Anfangsstelle ist markiert. Die Eintragung der Zahlen erfolgt im Drehungssinne des Uhrzeigers. Die Teilstriche sind über den Rand der Scheibe fortgesetzt. Jedes Intervall kann in 4 gleiche Teile geteilt werden, so daß die Scheibe auch als Transporteur benutzt werden kann. Ein rechter Winkel hat 100 Zentesimalgrade. Für die Benützung der noch freien Flächen gelten die gleichen Bestimmungen wie bei dem Rechenstab. Beiden sind Tabellen für verschiedene Moduln beigegeben, die in einfacher Weise befestigt und wieder abgenommen werden können.

§ 10.

Gebrauchsanweisung.

Rechenstab wie Rechenschieber können beim Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren verwendet werden. Die beigefügten Indextafeln erleichtern das Aufsuchen der Numeris. Sie geben für einen gegebenen Numerus den Index an, d. h. die Zahl, über welcher dieser Numerus steht. Bei dem Stabe ist nur eine Indexreihe notwendig, bei der Scheibe eine zweite am äußersten Rande zweckmäßig. Bei dem Stabe ist die Bewegung des Schiebers eine gradlinige, bei der Scheibe die Bewegung des eingelegten Ringes eine rotierende. Der Rechtsbewegung des Schiebers entspricht eine Rechtsdrehung des Ringes, der Linksbewegung im allgemeinen eine Linksdrehung. Die Handhabung von Stab und Scheibe ist überall die gleiche, wo die Verschiedenheit nicht besonders erwähnt wird.

§ 11.

Addition.

Einschlägig bei dem Stabe: Die beiden Zahlenreihen $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$,
bei der Scheibe: die entsprechenden innern Zahlenreihen.

Man stellt den Index 0 der Reihe $\dot{I}_1$ auf den einen Summanden in der Reihe $\dot{I}_2$ und liest unter dem zweiten Summanden der Reihe $\dot{I}_1$ die Summe in $\dot{I}_2$ ab. Mit der Summe und dem dritten Summanden verfährt man in gleicher Weise. Es erscheint zweckmäßig, vom kleineren zum größeren Summanden vorwärts zu schreiten.

Mehrstellige Zahlen wird man vorher durch eine Potenz von 10 dividieren und am Schlußresultate die Veränderung berücksichtigen. In diesem Falle wird man nur ein Annäherungsresultat erwarten dürfen.

§ 12.

Subtraktion.

Einschlägig: Wie bei der Addition.

Man bringt den Minuenden und den Subtrahenden zur Koinzidenz und liest unter der 0 des Schiebers, resp. beweglichen Ringes die Differenz ab. Ist der Subtrahend größer als der Minuend, so ist bei dem Stabe und bei der Scheibe die Differenz gleich der Anzahl der links vom Nullpunkte stehenden Teile des Schiebers, resp. der unbeweglichen Graduierung.

§ 13.

Multiplikation zweier einzifferigen Zahlen.

Einschlägig bei dem Stabe: Die Zahlenreihen N_1, N_2, I_1,
bei der Scheibe: Ring und äußere Zahlenreihe.

Man sucht zunächst die Indizes der beiden Faktoren mittelst der Indextafel. Hierauf stellt man die Ziffer 1 der Reihe N_2 unter den Faktor mit dem kleineren Index und liest über dem zweiten Faktor in der Reihe N_1 das Produkt ab. Bei dem Rechenstab kann nun der Fall eintreten, daß der zweite Faktor in der Reihe N_2 über den Apparat hinausfällt. Dann rückt man den Schieber soweit nach links, daß d i e Zahl der Reihe N_2, die auf den Rand des Stabes fällt, oder was sich noch als praktischer für das Gedächtnis erweist, die unter ihr stehende Indexzahl, unter die 1 der Reihe N_1 am links gelegenen Ende zu stehen kommt. Z. B.

1. $7 \cdot 8 = ?$ (Siehe Tafel 1 und 2.)

Zu 7 gehört der Index 9, zu 8 der Index 3.

Man stellt die Ziffer 1 der Zahlenreihe N_2 unter 7 (Index 9) der Zahlenreihe N_1. Über der Ziffer 8 (Index 3) steht das Produkt 56 in der Reihe N_1.

2. $6 \cdot 9 = ?$

Zu 6 gehört der Index 70, zu 9 der Index 38.

Man stellt die Ziffer 1 des Schiebers in der Zahlenreihe N_2 unter 9 (6) der Zahlenreihe N_1. Über 6 (9) in N_2 hätte man das Produkt abzulesen. Da aber 6 über den Apparat hinausfällt, rückt man den Schieber soweit nach links, daß die am rechten Ende stehende Zahl 45 (17) mit dem Index 62 (30) unter die Ziffer 1 am linken Ende zu stehen kommt. Nach der Verschiebung befindet sich über 6 (9) die Zahl 54 in der Reihe N_1.

Bei der Scheibe genügt zur Ermittelung von $6 \cdot 9 = 54$ nur eine Drehung.

§ 14.

Multiplikation einer einzifferigen mit einer zweizifferigen Zahl.

Einschlägig: Wie vorhin.

Man ermittelt zunächst den Index der einzifferigen und der zweizifferigen Zahl und stellt die Ziffer 1 des Schiebers unter einen der beiden Faktoren. Über dem zweiten Faktor liest man in der Reihe N_1 entweder das Produkt selbst oder den Rest ab, der sich durch Division des Produktes mit 101 ergibt. Alle Produkte, welche gleich oder kleiner als 100 sind, gibt der Stab unmittelbar an. Ist aber das Produkt größer als 100, so hat man zu dem ermittelten Reste noch ein Vielfaches von 101 hinzuzählen. Die Frage ist nun zunächst, wievielmal 101 man zu dem Reste noch hinzunehmen muß. Da man die Einerstelle des Produktes und jene des Restes kennt, ist auch die Ergänzungszahl der Einheiten bekannt, welche zu den Einern des Restes hinzuzunehmen ist, um die Einer des Produktes zu erhalten. Mit der nämlichen Zahl hat man 101 zu multiplizieren. Man kann aber auch den kleineren der beiden Faktoren mit der Zehnerstelle des größern unter Berücksichtigung der Korrektur multiplizieren und ermitteln, wie oft 101 in diesem Produkt enthalten ist. Der ersteren Methode ist der Vorzug zu geben. Z. B.

1. $7 \cdot 14 = ?$ (Siehe Tafel 1 und 2.)

Index von 7 ist 9, von 14 ist 10.

Nach der Einstellung liest man über 14 unmittelbar 98 ab.

2. $9 \cdot 85 = ?$

Index von 9 ist 38, von 85 ist 54.

Nach der Einstellung liest man über 85 den Rest 58 ab.

α) Man kennt die Einerstelle des Produktes, d. i. 5, die Einerstelle des Restes ist 8. Zu 8 muß man 7 Einheiten addieren, um wieder eine 5 in den Einern zu bekommen.

Also ist $9 \cdot 85 = 7 \cdot 101 + 58 = 765 = 7(58 + 7)$ in dezimaler Anschreibung.

β) Man multipliziert 9 mit der Zehnerstelle von 85; $9 \cdot 80 = 720$; in 720 ist 101 siebenmal enthalten; daher wieder $9 \cdot 85 = 7 \cdot 101 + 58 = 765 = 7\,(58 + 7)$ in dezimaler Anschreibung.

Diese beiden Methoden führen zu folgender Regel:

„Man bestimmt den Rest (58) und setzt die „Ergänzungszahl" links vor die Summe aus Rest und Ergänzungszahl $(7[58 + 7])$."

Fällt nach der Einstellung einer der beiden Faktoren über den Apparat hinaus, so bringt man den Schieber in der bereits angegebenen Weise an das linke Ende des Stabes. Z. B.

$9 \cdot 92 = ?$

Index von 9 ist 38, von 92 ist 88.

Man stellt 1 unter 9. Da über 92 mit dem Index 88 keine Zahl steht, führt man den Schieber soweit nach links, bis der Index 62 unter 1 zu stehen kommt und liest über 92 den Rest 20 ab. Die Einerstelle des Produktes ist 8; mithin die Ergänzungszahl auch 8. Demnach ist

$9 \cdot 92 = 8(20 + 8)$ in dezimaler Anschreibung, also $= 828$.

§ 15.

Multiplikation einer einzifferigen mit einer dreizifferigen Zahl.

$m \cdot (100a + 10b + c)$.

Die dreizifferige Zahl steht nicht mehr auf dem Stabe. Man bildet daher zunächst $(100a + 10b + c)$ mod 101. Der verbleibende Rest ist $10b + c - a$, oder wenn dieser Ausdruck negativ ist, $101 - (10b + c - a)$.

Man ermittelt zunächst die Indizes von m und $r = 10b + c - a$ (resp. $101 - [10b + c - a]$), um m, bezw. den Rest r auf dem Stabe sofort zu finden.

Nun ist $m \cdot (100a + 10b + c) \equiv m \cdot r$ mod 101.

Die Ziffer 1 stellt man vorteilhaft auf diejenige der beiden Zahlen m und r, welche den kleineren Index hat und liest über der zweiten Zahl den Rest ab, welchen die Division von $m \cdot (100a + 10b + c)$ mit 101 ergibt. Zu diesem Reste hat man ein Vielfaches von 101 zu addieren, um das Produkt selbst zu erhalten.

Dieses wird eine dreizifferige Zahl in den folgenden Fällen:

$2 \times 100, 101, 102, \ldots 499$;	$6 \times 100, 101, 101 \ldots 166$;
$3 \times 100, 101, 102, \ldots 333$;	$7 \times 100, 101, 102 \ldots 142$;
$4 \times 100, 101, 102, \ldots 249$;	$8 \times 100, 101, 102 \ldots 124$;
$5 \times 100, 101, 102, \ldots 199$;	$9 \times 100, 101, 102 \ldots 111$.

In allen übrigen Fällen wird das Produkt vierzifferig. Das Multiplum von 101, welches zu dem abgelesenen Reste hinzugefügt werden muß, kann auf folgende Weise ermittelt werden:

a) Das Produkt ist dreizifferig. Man bestimmt die Ergänzungszahl, d. i. jene Anzahl von Einheiten, welche zu den Einern des Restes zu addieren ist, um die Einer des Produktes zu erhalten. Z. B.

$7 \cdot 138 = ?$

Index von 7 ist 9; 138 mod $101 = 37$; der Index von 37 ist 56.

Man stellt die Ziffer 1 des Schiebers unter 7 und liest über dem Reste 37 (Ind. 56) in der Reihe N_1 den Rest des Produktes ab. Derselbe ist 57.

Die Einerstelle des Produktes ist 6, jene des Restes ist 7. Zu 7 hat man noch 9 Einheiten hinzuzählen, um wieder 6 in der Einerstelle zu erhalten.

Also ist $7 \cdot 138 = 9 \cdot 101 + 57 = 966 = 9(9 + 57)$ in dezimaler Anschreibung.

b) Das Produkt ist vierzifferig. Denkt man sich den Rest $m \cdot (100a + 10b + c)$ mod 101 von dem Produkte $m \cdot (100a + 10b + c)$ abgezogen, so bleibt (siehe § 8 β) eine vierzifferige Zahl von der Form pqpq (in dezimaler Anschreibung) übrig. In dieser wird die Tausenderstelle p mit der Tausenderstelle von $m \cdot (100a + 10b + c)$ übereinstimmen; denn der Rest r von $m \cdot (100a + 10b + c)$ mod 101 wird im allgemeinen die Hunderterstelle q in pqpq, aber nicht mehr die Tausenderstelle verändern. p wird demgemäß so groß wie die Zehnerstelle in $m \cdot a$ sein. q ist aber wieder die Ergänzungszahl von den Einern des Restes r zu den Einern des Produktes $m \cdot (100a + 10b + c)$. Z. B.

$8 \cdot 9{,}37 = ?$

$8 \cdot 937 \equiv 8 \cdot (37 - 9) \bmod 101 \equiv 8 \cdot 28 \bmod 101.$

Index von 8 ist 3, Index von 28 ist 11.

Man stellt 1 des Schiebers unter 8 und liest den Rest 22 des Produktes über 28 (Ind 11) ab. Es ist also $8 \cdot 937 = pqpq + 22$.

p ist 7, weil es mit der Zehnerstelle von $8 \cdot 9$ übereinstimmen muß;

q ist 4, weil zur Einerstelle 2 des Restes 4 Einheiten zu addieren sind, um die Einerstelle des Producktes, d. i. 6 (aus $8 \cdot 7 = 56$) zu bekommen.

Demnach ist $pqpq = 7474$ und

$8 \cdot 937 = 7474 + 22 = 74(74 + 22) = 7496.$

$8 \cdot 9{,}37 = 74{,}96.$

§ 16.

Multiplikation einer einzifferigen mit einer vierzifferigen Zahl.

$$m \cdot (1000a + 100b + 10c + d).$$

Bedeutet r den Rest von $(1000a + 100b + 10c + d) \bmod 101$, so ist

$$m \cdot (1000a + 100b + 10c + d) \equiv m \cdot r \bmod 101.$$

$$r \equiv (10c + d - [10a + b]) \bmod 101 \text{ oder auch}$$

$$r \equiv [101 - (10c + d) + (10a + b)] \bmod 101, \text{ wenn } 10a + b > 10c + d.$$

Man stellt die Ziffer 1 auf diejenige der beiden Zahlen m, r, welche den kleineren Index hat und liest über der andern Zahl den Rest ab, welchen die Division von $m \cdot (1000a + 100b + 10c + d)$ mit 101 ergibt. Zu diesem Reste hat man ein Multiplum von 101 zu addieren, um das wirkliche Produkt zu bekommen. Dasselbe wird eine vierzifferige Zahl in den Fällen:

$2 \times 1000, 1001, 1002, \ldots 4999;$
$3 \times 1000, 1001, 1002, \ldots 3333;$
$4 \times 1000, 1001, 1002, \ldots 2499;$
$5 \times 1000, 1001, 1002, \ldots 1999;$
$6 \times 1000, 1001, 1002, \ldots 1666;$
$7 \times 1000, 1001, 1002, \ldots 1428;$
$8 \times 1000, 1001, 1002, \ldots 1249;$
$9 \times 1000, 1001, 1002, \ldots 1111.$

In allen übrigen Fällen wird das Produkt fünfzifferig.

a) Das Produkt ist vierzifferig: Man bestimmt $m \cdot (10c + d) - r \bmod 100 = 10p + q$; dann ist $pqpq + r$ in dezimaler Anschreibung das gesuchte Produkt.

Z. B. $4 \cdot 2389 = ?$

$4 \cdot 2389 \equiv 4 \cdot (89 - 23) \bmod 101 = 4 \cdot 66 \bmod 101.$

Index von 4 ist 2, Index von 66 ist 83.

Man stellt die Ziffer 1 des Schiebers auf 4 (Index 2) und liest über 66 (Index 83) den Rest 62 ab. Also ist $4 \cdot 2389 \equiv 62 \bmod 101$.

$10c + d$ ist hier 89; mithin $m \cdot (10c + d) = 4 \cdot 89$

$m \cdot (10c + d) - r = 4 \cdot 89 - 62 = 356 - 62 = 294$

$294 \bmod 100 \equiv 94$

Also $4 \cdot 2389 = 9494 + 62 = 9556$.

b) Das Produkt ist fünfzifferig. Denkt man sich den Rest r von dem Produkt abgezogen, so bleibt eine Zahl von der Form $pq(p + s)qs$ (siehe § 8 γ) übrig. Das Multiplum von 101, welches man zu r addieren muß, ist pqs und das Produkt

$m \cdot (1000a + 100b + 10c + d) = pq(p + s)qs + r = pqs \cdot 101 + r.$

qs ist die Ergänzungszahl von r auf $m \cdot (10c + d) \bmod 100$, während man p als Zehnerstelle von $m \cdot (10a + b)$ unmittelbar findet.

Z. B. $8 \cdot 79{,}34 = ?$

$8 \cdot 7934 \equiv 8 \cdot (135 - 79) \bmod 101 \equiv 8 \cdot 56 \bmod 101.$

Index von 8 ist 3; Index von 56 ist 12.

Man stellt die Ziffer 1 des Schiebers auf 8 (Index 3) und liest über 56 (Index 12) den Rest 44 ab.

Da qs die Ergänzungszahl von 44 auf $8 \cdot 34 \bmod 100 \equiv 72 \bmod 100$ ist, so findet man $qs = 28$.

Aus $8 \cdot 79$ folgert man $p = 6$. Also

$8 \cdot 79{,}34 = 62(6 + 8),\ 28 + 0{,}44 = 634,\ 28 + 0{,}44 = 634,\ 72.$

Man kann aber auch in der gewöhnlichen Weise die Teilprodukte bilden. Zu diesem Zwecke stellt man für das vorangehende Beispiel die Ziffer 1 des Schiebers auf 8 und liest über 7, 9, 3, 4 die Produkte 56, 72, 24, 32 unmittelbar ab, ohne den Schieber zu bewegen.

Letztere Methode empfiehlt sich insbesondere bei der Multiplikation einer einzifferigen mit einer 5, 6, 7 ... zifferigen Zahl wie auch bei vielen der folgenden Multiplikationen.

Die Entwickelungen des § 16 zeigen jedoch, daß die praktische Verwendbarkeit dieser Recheninstrumente bei der Multiplikation einer einzifferigen mit einer mehr als dreizifferigen Zahl keine wesentlichen Vorteile mehr bietet.

§ 17.

Multiplikation zweier zweizifferigen Zahlen.

Das Produkt zweier zweizifferigen Zahlen hat entweder 3 oder 4 Stellen.

a) Dreizifferig wird dasselbe für die Fälle:

$10 \times 10, 11, \ldots 99$	$21 \times 21, 22, \ldots 47$
$11 \times 11, 12, \ldots 90$	$22 \times 22, 23, \ldots 45$
$12 \times 12, 13, \ldots 83$	$23 \times 23, 24, \ldots 43$
$13 \times 13, 14, \ldots 76$	$24 \times 24, 25, \ldots 41$
$14 \times 14, 15, \ldots 71$	$25 \times 25, 26, \ldots 39$
$15 \times 15, 16, \ldots 66$	$26 \times 26, 27, \ldots 38$
$16 \times 16, 17, \ldots 62$	$27 \times 27, 28, \ldots 37$
$17 \times 17, 18, \ldots 58$	$28 \times 28, 29, \ldots 35$
$18 \times 18, 19, \ldots 55$	$29 \times 29, 30, \ldots 34$
$19 \times 19, 20, \ldots 52$	$30 \times 30, 31, 32, 33$
$20 \times 20, 21, \ldots 49$	$31 \times 31, 32.$

Alle diese Produkte, welche zwischen $10 \cdot 10$ und $31 \cdot 32$ gelegen sind, haben nach Abzug des Restes mod 101 die Form pop

und es genügt zu ihrer Ableitung die Bestimmung von p, die mittelst der Ergänzungszahl erfolgt.

Beispiel. $2{,}9 \cdot 3{,}4 = ?$

29 hat den Index 91, 34 hat den Index 31.

Nun ist $29 \cdot 34 \equiv 77 \bmod 101$.

Die Ergänzungszahl ist 9.

Also $29 \cdot 34 = 909 + 77 = 986$.

$2{,}9 \cdot 3{,}4 = 9{,}86$.

Man kann aber auch zur Bestimmung von $2,\ 9 \cdot 3{,}4$ die Teilprodukte ableiten, indem man die Ziffer 1 des Schiebers unter 34 stellt und über 2 den Rest 68, über 9 den Rest 3 (Ergänzungszahl auch 3) abliest. Man erhält

$$\begin{array}{rl} 2{,}9 \cdot 3{,}4 = 6{,}8 & \\ \underline{3{,}06} & \quad (3 \cdot 101 + 3) \\ 9{,}86 & \end{array}$$

b) In allen übrigen Fällen wird das Produkt $a \cdot b$ vierzifferig, also nach Abzug des Restes von der Form pqpq. Zur Bestimmung von pq genügt die Kenntnis der zwei letzten Ziffern des Produktes $a \cdot b$, die man sich auf die eine oder andere der folgenden Arten verschaffen kann.

Beispiel: $67 \cdot 75 = ?$

Index von 67 ist 81, Index von 75 ist 17.

Nach der üblichen Einstellung (1 unter 75) liest man über 6 den Rest 46 (Ergänzungszahl 4), über 7 den Rest 20 (Ergänzungszahl 5) ab. Also ist

$$\begin{array}{rl} 67 \cdot 75 = (404 + 46) \cdot 10 = & 4500 \\ + 505 + 20 \quad = & \underline{525} \\ & 5025 \end{array}$$

Oder: $67 \cdot 75 \equiv 76 \bmod 101$.

$$\begin{array}{rl} 10 \cdot 67 \cdot 7 = & \cdot\cdot\ 90 \\ \underline{67 \cdot 5} = & \underline{\cdot\cdot\ 35} \\ 67 \cdot 75 = & \cdot\cdot 125 \\ \text{Rest} = & \underline{\cdot\ 76} \\ 67 \cdot 75 - 76 = & \cdot\cdot\ 49 \end{array}$$

Also $67 \cdot 75 = 4949 + 76 = 5025$.

Oder: Man bildet nur die Einer des Produktes, im gegebenen Falle 5, verschafft sich die Ergänzungszahl von den Einern des Restes, d. i. 6, auf die Einer des Produktes. Es ergibt sich $q = 9$.

Aus der Multiplikation der Zehner von 67 und 75 findet man $p = 4$.

Mithin $pq = 49$. Das übrige wie vorhin.

Beispiel. $67 \cdot 99 = ?$ (Nach der letzten Methode zu bilden!)

Index von 67 ist 81, Index von 99 ist 51.

Man liest ab: $67 \cdot 99 \equiv 68 \mod 101$.

Die Ergänzungszahl ist 5; also auch $q = 5$.

Die Zahl p ergibt sich durch Multiplikation der Zehner von 67 und 99 mit Berücksichtigung der Korrektur als 6. Also ist

$67 \cdot 99 = 6565 + 68 = 6633$.

Eine weitere Methode ist die folgende:

Die beiden zweizifferigen Zahlen seien $10a + b$ und $10a_1 + b_1$. Ihr Produkt ist

1. $(10a + b) \cdot (10a_1 + b_1) = 100aa_1 + 10(ab_1 + ba_1) + bb_1$.

Bezeichnet man mit r den Rest des Produktes mod 101, so kann man auch

2. $(10a + b) \cdot (10a_1 + b_1) = 101 \cdot (aa_1 + x) + r$ setzen und erhält für x aus 1 und 2

$$x = \frac{10(ab_1 + ba_1) + bb_1 - aa_1 - r}{101}$$

In diesem Bruche ist der Summand $10(ab_1 + ba_1)$ der ausschlaggebende und x höchstens um die Einheit von den Ganzen verschieden, welche in $\frac{10(ab_1 + ba_1)}{101}$ enthalten sind. Die Bestimmung der Ergänzungszahl befreit auch hier von eintretenden Zweifeln.

Beispiel: $67 \cdot 99 = (10 \cdot 6 + 7) \cdot (9 \cdot 10 + 9)$

$67 \cdot 99 \equiv 68 \mod 101$

$a \cdot a_1 \equiv 54$.

Man bildet in dem Produkt $67 \cdot 99$ das Produkt der äußern Glieder: $6 \cdot 9 = 54$;

hierauf das Produkt der innern Glieder: $7 \cdot 9 = 63$;

Ihre Summe ist: $6 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 117$;

Das Zehnfache derselben: 1170;

101 ist in 1170 elfmal enthalten.

Folglich: $aa_1 + x = 54 + 11 = 65$.

Die Ergänzungszahl ist auch 5; also ist x richtig und

$67 \cdot 99 = 65 \cdot 101 + 68 = 6633$.

Beispiel: $27 \cdot 71 = ?$

$27 \cdot 71 = (2 \cdot 10 + 7) \cdot (7 \cdot 10 + 1) \equiv 99 \mod 101$.

Das Produkt der äußern Ziffern ist: $2 \cdot 1 = 2$

„ „ „ innern „ „ : $7 \cdot 7 = 49$

Ihre Summe ist $2 \cdot 1 + 7 \cdot 7 = 51$

Das Zehnfache derselben: 510

In 510 ist 101 fünfmal enthalten; also folgt für $aa_1 + x = 14 + 5 = 19$.

Da aber die Ergänzungszahl 8 ist, muß das Multiplum von 101 in den Einern auch auf 8 endigen; mithin ist $aa_1 + x = 18$ und

$27 \cdot 71 = 18 \cdot 101 + 99 = 1917$.

§ 18.

Multiplikation einer zweizifferigen mit einer dreizifferigen Zahl.

Die Zahlen seien $10a + b$ und $100a_1 + 10b_1 + c_1$; ferner bestehe die Kongruenz

$100a_1 + 10b_1 + c_1 \equiv r_1 \mod 101$ und

$(10a + b) \cdot (100a_1 + 10b_1 + c_1) \equiv (10a + b) \cdot r_1 \mod 101 \equiv r \mod 101$.

Dieses Produkt kann vier- oder fünfzifferig sein.

a) $(10a + b)(1000_1 + 10b_1 + c_1)$ wird vierzifferig in den Fällen:

$10 \times 100, 101, \ldots . 999,$

$11 \times 100, 101, \ldots . 909,$

$12 \times 100, 101, \ldots . 833,$

$13 \times 100, 101, \ldots . 769,$

$\vdots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$

$97 \times 100, 101, \ldots . 103,$
$98 \times 100, 101, 102,$
$99 \times 100, 101.$

Zieht man den jeweiligen Rest r ab, so verbleibt eine Zahl von der Form pqpq. Die Ziffer q findet man als Einerstelle aus $b \cdot c_1 - r$, während p sich als die Anzahl der Hunderter des Produktes $(10a + b) \cdot (10a_1 + b_1)$ mittelst des Apparates oder nach einer der Methoden des vorigen Paragraphen ermitteln läßt.

Beispiel: $28 \cdot 345 = ?$

$345 \bmod 101 \equiv (45 - 3) \bmod 101 \equiv 42 \bmod 101.$

$28 \cdot 345 \equiv 28 \cdot 42 \bmod 101 \equiv 65 \bmod 101.$

Die Ergänzungszahl ist 5.

Für $28 \cdot 34$ ergibt sich mittelst des Apparates zunächst der Rest 43 und hieraus durch Hinzufügung des Multiplums von 101 für p der Wert 9.

Daher ist $pq = 95$ und

$28 \cdot 345 = 95 \cdot 101 + 65 = 9660.$

Beispiel: $13 \cdot 769 = ?$

$769 \equiv (69 - 7) \bmod 101 \equiv 62 \bmod 101$

$13 \cdot 769 \equiv 13 \cdot 62 \bmod 101 \equiv 99 \bmod 101.$

Die Ergänzungszahl ist 8, während aus $13 \cdot 76$ unmittelbar $p = 9$ folgt.

Daher $pq = 98$ und

$13 \cdot 769 = 98 \cdot 101 + 99 = 9997.$

Man kann aber auch in diesen beiden Beispielen die Teilprodukte mittelst des Apparates ableiten und diese in der gewöhnlichen Weise addieren.

Beispiel: $28 \cdot 345 = ?$

$345 \equiv (45 - 3) \quad \equiv 42 \bmod 101.$

$2 \cdot 345 \equiv 2 \cdot 42 \bmod 101 \equiv 84 \bmod 101;$ Ergänzungszahl: 6

$8 \cdot 345 \equiv 8 \cdot 42 \bmod 101 \equiv 33 \bmod 101;$ „ 27.

Also $10 \cdot 2 \cdot 345 = 10 \cdot (6 \cdot 101 + 84) = 6900$

$8 \cdot 345 = 27 \cdot 101 + 33 \quad = 2760$

$28 \cdot 345 \quad = 9660.$

Beispiel: $13 \cdot 769 = ?$

$769 \equiv (69 - 7) \equiv 62 \bmod 101$

$1 \cdot 769 \equiv 1 \cdot 62 \bmod 101;$ Ergänzungszahl: 7

$3 \cdot 769 \equiv 3 \cdot 62 \bmod 101 \equiv 85 \bmod 101;$ Ergänzungszahl: 22

$10 \cdot 1 \cdot 769 = 7690$

$3 \cdot 769 = 2307$

$13 \cdot 769 = 9997.$

β) Das Produkt einer zwei- mit einer dreizifferigen Zahl kann nun aber auch fünfzifferig werden. Dies tritt ein, wenn in $(10a + b) \cdot (100a_1 + 10b_1 + c_1)$ das Produkt $a \cdot a_1$ größer als 9 ist.

In diesem Falle wird man mit dem Apparate die Teilprodukte bilden.

Beispiel: $28 \cdot 529 = ?$

$529 \equiv (29 - 5) \bmod 101 \equiv 24 \bmod 101.$

$2 \cdot 529 \equiv 2 \cdot 24 \bmod 101 \equiv 48 \bmod 101;$ Ergänzungszahl: 10

$8 \cdot 529 \equiv 8 \cdot 24 \bmod 101 \equiv 91 \bmod 101;$ „ 41.

$28 \cdot 529 = 10 \cdot (10 \cdot 101 + 48) = 10580$

$+ \quad 41 \cdot 101 + 91 = 4232$

$14812.$

Oder:

Da $(10a + b)(100a_1 + 10b_1 + c_1) - r$ die Form $pq(p+s)qs$ haben muß, kann man sich auch die 3 letzten Stellen hiervon verschaffen, um p, q, s zu berechnen.

Beispiel: $28 \cdot 529 = ?$

$5 \cdot 8 \quad = .\ 0$

$2 \cdot 28 = \quad .\ 56$

$9 \cdot 28 = \quad 252$ ($9 \cdot 28 \equiv 50 \bmod 101$; Ergänzungszahl: 2)

$28 \cdot 529 = .\ .\ 812$

Nun ist $28 \cdot 529 \equiv 28 \cdot 24 \bmod 101 \equiv 66 \bmod 101.$

Ergänzungszahl: $812 - 66 \equiv 746 \bmod 100 \equiv 46 \bmod 100$

$p \quad = 7 - 6 = 1.$

Also $pqs = 146$

$28 \cdot 529 = 146 \cdot 101 + 66 = 14746 + 66 = 14812$

Beispiel: $99 \cdot 999 = ?$

$$
\begin{array}{rcl}
999 & \equiv & 90 \mod 101 \\
99 \cdot 999 & \equiv & 99 \cdot 90 \mod 101 \equiv 22 \mod 101. \\
\cdot 9 \cdot 9 & = & \cdot \cdot 1 \\
99 \cdot 9 & = & \cdot 91 \\
99 \cdot 9 & = & 891 \\
\hline
99 \cdot 999 & = & 1901 \\
r & = & 22 \\
\hline
99 \cdot 999 - r & = & (1)879 \\
qs & = & 79 \\
p & = & 18 - 9 = 9 \\
pqs & = & 979 \\
99 \cdot 999 & = & 979 \cdot 101 + 22 = 98901.
\end{array}
$$

§ 19.

Division.

Einschlägig: Bei Stab und Scheibe wie bei der Multiplikation.

Stab wie Scheibe eignen sich nur dann zur Berechnung eines Ausdruckes von der Form $x = \frac{a \cdot b \cdot c \ldots}{d \cdot e \cdot f \ldots}$, wenn der Nenner des Bruches in dem Zähler restlos enthalten ist. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so kann man x nur auf die Form $\frac{m}{n}$ bringen, wobei $m = a \cdot b \cdot c \ldots$, $n = d \cdot e \cdot f \ldots$ ist. Hat man etwa 81 durch 3 zu dividieren, so sucht man zunächst die Indizes von 81 und 3, bringt beide zur Koinzidenz und liest über der Ziffer 1 des Schiebers, bezw. des drehbaren Ringes den Quotienten 27 in N_1 ab.

Es wird vorkommen, daß die Ziffer 1 des Schiebers über das linke Ende des Stabes hinausfällt. Bei der Scheibe ist dieser Fall ausgeschlossen. Man hat dann den Schieber so weit nach rechts zu rücken, daß der unter der Ziffer 1 in N_1 stehende Teilstrich an die Kante rechts zu stehen kommt. Über 1 des Schiebers ist der Quotient abzulesen. Das Multiplum von 101, das man zu dem gefundenen Reste zu addieren hat, wird mit der Ergänzungszahl

bestimmt. Die Stellenzahl des Quotienten ist von vorneherein leicht zu unterscheiden.

Beispiel: $\frac{72}{12} = ?$

Index von 72 ist 41; Index von 12 ist 71.

Man stellt die Zahl 12 unter die Zahl 72, oder was dasselbe ist, den Index 71 über den Index 41. Der unter 1 in N_1 stehende Teilstrich hat den Index 30 mit dem darüberstehenden Numerus 17. Diesen schiebt man bis zum Rande am rechts gelegenen Ende und liest über der Ziffer 1 des Schiebers in der Reihe N_1 die Zahl 6 ab.

Bei der Scheibe ist diese Verschiebung nicht notwendig.

Beispiel: 324 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 30 Tagen bei täglich 8 stündiger Arbeitszeit. Wie lange müssen täglich 360 Arbeiter tätig sein, um dieselbe Arbeit in 24 Tagen fertig zu bringen?

$$x = \frac{8 \cdot 324 \cdot 30^{\,h}}{360 \cdot 24} \equiv \frac{8 \cdot 21 \cdot 30^h}{57 \cdot 24} \mod 101.$$

$$x = 9^h.$$

Man stellt 1 unter 8 und liest über 21 den Numerus 67 ab.
„ „ 1 „ 67 „ „ „ 30 „ „ 91 ab,
nachdem man den Schieber entsprechend weit nach links gerückt hat.

Man stellt 57 unter 91 und liest über 1 den Numerus 14 ab.
„ „ 24 „ 14 „ „ „ 1 „ „ 9 ab,
nachdem man den Schieber entsprechend weit nach rechts gerückt hat.

In der entsprechenden Weise operiert man mit der Scheibe.

Man findet also $x \equiv 9 \mod 101$. Der Zähler des obigen Bruches ist eine 5stellige, der Nenner eine 4stellige Zahl; es kann der Quotient demnach entweder eine 1- oder 2stellige Zahl werden. In dem gegebenen Falle ist er 1stellig, weil die Werte $x \equiv 9 \mod 101$, abgesehen von $x = 9$, sämtlich mehrstellig sind.

Beispiel: $x = \frac{259308}{189} = ?$

$$(259308 \equiv 0 \mod 189)$$

$$259308 \equiv (25 + 08 - 93) \mod 101 = -60 \mod 104 \equiv 41 \mod 101.$$

$$
\begin{aligned}
259\,308 &\equiv 41 \mod 101\\
189 &\equiv 88 \mod 101\\
x &\equiv \frac{41}{88} \mod 101.\\
\text{Ind } x &\equiv \text{Ind } 41 - \text{Ind } 88 \mod 100\\
&\equiv 45 - 16 \equiv 29 \mod 100.\\
x &\equiv 59 \mod 101.
\end{aligned}
$$

Der wirkliche Wert von x ist 4stellig. Es muß demnach $x - 59$ die Form pqpq haben. Man erkennt unmittelbar, daß $p = 1$ ist, weil 189 in 259 nur einmal enthalten ist; außerdem ersieht man, daß die Einerstelle von x die Ziffer 2 sein muß. Da nun die Einerstelle des Restes 9 ist, kann die Ergänzungszahl q nur $= 3$ sein. Daher pqpq $= 1313$ und

$$x = 1313 + 59 = 1372.$$

§ 20.

Potenzieren.

Einschlägig: Bei dem Stabe der Schieber,
bei der Scheibe der drehbare Ring.

Die Gebrauchsanweisung von Stab und Scheibe, welche in § 13—§ 19 für die Multiplikation gegeben worden ist, hat naturgemäß auch für das Potenzieren Gültigkeit. Aber die dort entwickelte Methode läßt in vielen Fällen eine Vereinfachung zu, welche sich auf die Ableitung in § 3 gründet und durch den Lehrsatz:

$$
\begin{aligned}
x &\equiv a^n \mod p\\
\text{Ind } x &\equiv n \cdot \text{Ind } a \mod p - 1
\end{aligned}
$$

bedingt wird. Derselbe gestattet zwar die Reste aller Potenzen mit ganzzahligem und positivem n abzuleiten. Trotzdem empfiehlt es sich nicht, mit dem Apparate Potenzen berechnen zu wollen, deren numerischer Wert eine sechs- und mehrzifferige Zahl wird.

a) Quadratur.

Die Quadrate der Zahlen 1, 2, 3, . . . 10 können auf dem Apparate abgelesen werden.

Beispiel: $x = 3^2$; $x \equiv 3^2 \mod 101$.

$$
\begin{aligned}
\text{Ind } x &\equiv 2 \text{ Ind } 3 \mod 100\\
&\equiv 2 \cdot 69 \mod 100 \equiv 38 \mod 100\\
x &\equiv 9 \mod 101;\; x = 9.
\end{aligned}
$$

Beispiel: $x = 7^2$; $x \equiv 7^2 \mod 101$. (Siehe Tafel 1 und 2.)

$$
\begin{aligned}
\text{Ind } x &\equiv 2 \cdot \text{Ind } 7 \mod 100.\\
&\equiv 2 \cdot 9 \mod 100 \equiv 18 \mod 100\\
x &\equiv 49 \mod 101;\; x = 49.
\end{aligned}
$$

Die Quadrate der Zahlen 10, 11, 12, . . . 31 werden dreizifferige Zahlen, also nach Abzug des Restes mod 101 von der Form pop. Man hat also zunächst wieder die Ergänzungszahl p zu suchen.

Beispiel: $x = 28^2$; $x \equiv 28^2 \mod 101$.

$$
\begin{aligned}
\text{Ind } x &\equiv 2 \cdot \text{Ind } 28 \mod 100 \equiv 2 \cdot 11 \mod 100 \equiv 22 \mod 100\\
x &\equiv 77 \mod 101.
\end{aligned}
$$

Nun endigt 28^2 auf eine 4; die Ergänzungszahl ist daher 7; mithin

$$28^2 = 7 \cdot 101 + 77 = 784.$$

Die Quadrate der Zahlen 32, 33, 34, . . . 99 inkl. werden vierzifferige Zahlen. Nach Abzug des Restes mod 101 bleibt eine Zahl von der Form pqpq. Zur Bestimmung von p und q mag der eine oder der andere der folgenden beiden Wege eingeschlagen werden.

Ist $10a + b$ die gegebene Zahl, deren Quadrat zu bestimmen ist, so ermittle man die Einerstelle von $20ab$ und das Quadrat von b; hierauf berechne man die Ergänzungszahl von r auf $(20ab + b^2)$.

Beispiel: $x = 65^2$; $x \equiv 65^2 \mod 101$.

$$
\begin{aligned}
\text{Ind } x &\equiv 2 \cdot \text{Ind } 65 \mod 100 \equiv 2 \cdot 90 \mod 100 \equiv 80 \mod 100\\
x &\equiv 84 \mod 101.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
20ab &= 60\cdot\\
b^2 &= \cdot 25\\
\hline
20ab + b^2 &\equiv 625 \mod 100\\
r &\equiv 84 \mod 100\\
20ab + b^2 - r &\equiv 41 \mod 100.\\
x &= 4141 + 84 = 4225.
\end{aligned}
$$

Oder:

Man weiß, daß $(10a + b)^2$ zwischen $(10a)^2$ und $[10(a + 1)]^2$ liegt; ferner kennt man die Einerstelle von b^2. Aus dieser und r kann man auf q, aus $(10a)^2$ und $[10(a + 1)]^2$ auf p schließen.

Beispiel: $x = 63^2$; $x \equiv 63^2 \bmod 101$.

$\text{Ind } x \equiv 2 \cdot \text{Ind } 63 \bmod 100 \equiv 2 \cdot 47 \bmod 100 \equiv 94 \bmod 100.$

$x \equiv 30 \bmod 101.$

Da 63^2 auf 9, der Rest 30 auf 0 endigt, ist $q = 9$.

63^2 liegt zwischen 60^2 und 70^2, aber näher an 60^2; also ist $p = 3$, mithin $pq = 39$ und $63^2 = 3939 + 30 = 3969$.

Beispiel: $x = 71^2$; $x \equiv 71^2 \bmod 101$

$\text{Ind } x = 2 \text{ Ind } 71 \bmod 100 \equiv 88 \bmod 100$

$x \equiv 92 \bmod 101.$

Die Ergänzungszahl $q = 9$; $p = 4$, weil 71^2 näher an 70^2 als an 80^2 liegt. Also

$$71^2 = 4949 + 92 = 5041.$$

Das Quadrat einer dreizifferigen Zahl kann fünf- oder sechszifferig werden.

Es wird fünfzifferig für die Quadrate aller Zahlen

$$100,\ 101,\ 102,\ \ldots\ 316$$

und hat nach Abzug des Restes mod 101 die Form

$$pqs \cdot 101 = pq(p + s)qs.$$

Ist nun $100a + 10b + c$ die dreizifferige Zahl, r der Rest, so kann man entweder aus den 3 letzten Stellen von $100b^2 + 20(10a + b)c + c^2$ und dem Reste r auf die Ergänzungszahl qs schließen, oder man verschafft sich, was auf das Gleiche hinausläuft, durch die gewöhnliche Multiplikation die 3 letzten Stellen von $(100a + 10b + c) \cdot (100a + 10b + c)$ und bestimmt aus ihnen und r wieder die Ergänzungszahl. Zieht man von der dritten Stelle s ab, so bleibt p, womit pqs bestimmt ist. Endlich kann man auch mittelst des Stabes die einzelnen Teilprodukte bilden.

Beispiel: $x = 289^2$; $x \equiv 289^2 \bmod 101 = (89 - 2)^2 \bmod 101 \equiv 87^2 \bmod 101.$

$\text{Ind } x = 2 \text{ Ind } 87 \bmod 100 \equiv 2 \cdot 60 \bmod 100 \equiv 20 \bmod 100.$

$x \equiv 95 \bmod 101.$

1. Art nach der Formel:

$$(100a + 10b + c)^2$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Nun ist} \quad 100b^2 = & (6)4\cdot\cdot \\
20(10a + b)c = & (5)04\cdot \\
c^2 = & 81 \\
\hline
100b^2 + 20(10a + b)c + c^2 = & \cdot 1521 \\
r = & 95 \\
\hline
100b^2 + 20(10a + b)c + c^2 - r = & (1)426 \\
qs = & 26 \\
p = & 14 - 6 = 8 \\
pqs = & 826\cdot
\end{array}$$

$$289^2 = 826 \cdot 101 + 95 = 83\,426 + 95 = 83\,521.$$

2. Art nach der Multiplikationsregel:

$$(100a + 10b + c) \cdot (100a + 10b + c)$$

$$\begin{array}{rl}
100ac = & \cdot\cdot 8 \cdot\cdot \\
10(10b + c)b = & \cdot\cdot 12 \cdot \\
(100a + 10b + c)c = & \cdot 601 \\
\hline
100ac + 10(10b + c)b + 100a + 10b + c)c = & (1)521 \\
r = & 95 \\
\hline
100ac + 10(10b + c)b + (100a + 10b + c)c - r = & (1)426 \\
qs = & 26 \\
p = & 14 - 6 = 8 \\
pqs = & 826.
\end{array}$$

Das Übrige wie oben.

3. Art.

Man rechnet nach der gewöhnlichen Multiplikationsregel die einzelnen Teilprodukte aus.

Man stellt die Ziffer 1 des Schiebers unter den Numerus 87 und liest über 2, 8, 9 die Reste 73, 90, 76 unmittelbar ab.

$2 \cdot 289 \equiv 2 \cdot 87 \bmod 101 \equiv 73 \bmod 101$; Ergänzungszahl: 5
$8 \cdot 289 \equiv 8 \cdot 87 \bmod 101 \equiv 90 \bmod 101$; „ 22
$9 \cdot 289 \equiv 9 \cdot 87 \bmod 101 \equiv 76 \bmod 101$; „ 25

$$289 \cdot 289 = 100\,(505 + 73) + 10\,(2222 + 90) + 2525 + 76$$
$$= 578$$
$$2312$$
$$2601$$
$$\overline{83521}$$

Das Quadrat einer dreizifferigen Zahl wird sechszifferig für die Zahlen:

317, 318, 319, ... 999.

Will man für die Berechnung ihrer Quadrate aus dem Rechenstab noch einigen Vorteil ziehen, so verfährt man am besten, indem man die einzelnen Glieder von $(100\,a + 10\,b + c)^2$ oder in der üblichen Weise die Teilprodukte bildet. Die Auflösung der Kongruenz

$$x \equiv (100\,a + 10\,b + c)^2 \bmod 101$$

ist dann überflüssig.

Beispiel: $x = 867^2$.

$$10^4 a^2 = 64 \cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$10^3 \cdot 2ab = 96 \cdot\cdot\cdot$$
$$10^2 \cdot b^2 = 36 \cdot\cdot$$
$$20 \cdot (10\,a + b) \cdot c = 1204 \cdot \; (2 \cdot 86 \cdot 7 \equiv 93 \bmod 101;\ \text{Erg.Z.}\ 11;$$
$$14 \cdot 86 = 11 \cdot 101 + 93 = 1204)$$
$$c^2 = 49$$
$$\overline{867^2 = 751689}$$

Oder:

$$867 \equiv (67 - 8) \bmod 101 \equiv 59 \bmod 101.$$

Man stellt die Ziffer 1 des Schiebers auf die Zahl 59 und liest über 8, 6, 7 die zugehörigen Reste 68, 51, 9 ab.

$8 \cdot 867 \equiv 8 \cdot 59 \bmod 101 \equiv 68 \bmod 101.$ Ergänzungszahl: 68
$6 \cdot 867 \equiv 6 \cdot 59 \bmod 101 \equiv 51 \bmod 101.$ „ 51
$7 \cdot 867 \equiv 7 \cdot 59 \bmod 101 \equiv 9 \bmod 101.$ „ 60

$$867^2 = 100 \cdot (6868 + 68) + 10 \cdot (5151 + 51) + 6060 + 9$$

$$= 6936$$
$$5202$$
$$6069$$
$$\overline{751689}$$

Einen großen Vorteil in der Berechnung von Quadraten großer Zahlen bietet der Rechenstab offenbar nicht mehr.

β) Kubatur.

Die Kuben von 1, 2, 3, 4 können direkt auf dem Apparate abgelesen werden.

Die Kuben von 5, 6, 7, 8, 9 sind dreizifferige Zahlen und ergeben sich mittelst der Ergänzungszahl.

Beispiel: $x = 9^3$.

$$x \equiv 9^3 \bmod 101.$$
$$\text{Ind}\ x \equiv 3\ \text{Ind}\ 9 \bmod 100 \equiv 3 \cdot 38 \bmod 100 \equiv 14 \bmod 100$$
$$x \equiv 22 \bmod 101.$$

Da 9^3 auf eine 9 endigt, ist die Ergänzungszahl 7; also

$$x = 7 \cdot 101 + 22 = 729.$$

Die Kuben von 10, 11, 12, ... 21 werden vierzifferig, also nach Abzug des Restes mod 101 von der Form pqpq. Man hat also nur die letzte Stelle von $3ab^2$ und die zwei letzten Stellen von b^3 zu berechnen, um aus ihnen und dem Reste auf die Ergänzungszahl pq zu schließen.

Beispiel: $x = 19^3$

$$x \equiv 19^3 \bmod 101$$
$$\text{Ind}\ x \equiv 3\ \text{Ind}\ 19 \bmod 100 \equiv 3 \cdot 96 \bmod 100 \equiv 88 \bmod 100$$
$$x \equiv 92 \bmod 101.$$

Nun ist $10 \cdot 3ab^2 = \cdot\cdot 3 \cdot$

$$b^3 = \cdot\cdot 29$$
$$\overline{10 \cdot 3ab^2 + b^3 = \cdot\cdot 59}$$
$$r = 92$$
$$\overline{10 \cdot 3ab^2 + b^3 - r = 67}$$
$$pq = 67$$
$$19^3 = 67 \cdot 101 + 92 = 6767 + 92 = 6859.$$

Die Kuben von 22, 23, 24, . . . 46 werden fünfzifferige Zahlen, also nach Abzug des Restes von der Form $pq(p+s)qs$.

Hier ist die Berechnung der letzten Stelle von $3a^2b$, der zwei letzten Stellen von $3ab^2$ und des Kubus von b notwendig, um aus ihnen und dem Reste auf die Ergänzungszahl qs und die Zahl p schließen zu können. Da in $pq(p+s)qs$ die dritte Ziffer aus der Summe von $p+s$ besteht, hat man nur s von der dritten Ziffer, d. i. $p+s$ abzuziehen, um p zu erhalten.

Beispiel: $x = 46^3$

$$x \equiv 46^3 \bmod 101$$

$$\text{Ind}\, x \equiv 3\,\text{Ind}\, 46 \bmod 100 \equiv 3\cdot 87 \bmod 100 \equiv 61 \bmod 100$$

$$x \equiv 73 \bmod 101.$$

$$\begin{aligned}
10^2\cdot 3a^2b &= \cdots 8\cdot\cdot \\
10\cdot 3ab^2 &= \quad 32\cdot \\
b^3 &= \quad 216 \\
\hline
10^2\cdot 3a^2b + 10\cdot 3ab^2 + b^3 &= \quad 1336 \\
r &= \quad\;\; 73 \\
\hline
10^2\cdot 3a^2b + 10\cdot 3ab^2 + b^3 - r &= \quad 1263 \\
qs &= \quad\;\; 63 \\
p+s &= 2 \bmod 10 \\
p = 12-3 &= \quad 9 \\
pqs &= \quad 963\cdot \\
46^3 &= \quad 963\cdot 101 + 73 = \\
&\quad 97263 + 73 = 97336.
\end{aligned}$$

Die Kuben von 47, 48, 49, . . . 99 sind sechszifferige Zahlen, also von der Form $pq(p+s)(q+t)st$.

Zur Bestimmung der Größen p, q, s, t ist die Berechnung der letzten Stelle von a^3, der zwei letzten Stellen von $3a^2b$, der drei letzten Stellen von $3ab^2$ und des Kubus von b^3 erforderlich.

Beispiel: $x = 69^3$

$$x \equiv 69^3 \bmod 101.$$

$$\text{Ind}\, x \equiv 3\ \text{Ind}\ 69 \bmod 100 \equiv 3\cdot 55 \bmod 100 \equiv 65 \bmod 100$$

$$x \equiv 57 \bmod 101.$$

$$\begin{aligned}
10^3\cdot a^3 &= \cdot\cdot 6\cdot\cdot\cdot \\
10^2\cdot 3a^2b &= \cdot\cdot 72\cdot\cdot \\
10\cdot 3ab^2 &= \cdot\cdot 458\cdot \\
b^3 &= \quad 729 \\
\hline
10^3\cdot a^3 + 10^2\cdot 3a^2b + 10\cdot 3ab^2 + b^3 &= (1)8509 \\
r &= \quad\;\; 57 \\
\hline
10^3 a^3 + 10^2\cdot 3a^2b + 10\cdot 3ab^2 + b^3 - r &= \cdot\ 8452 \\
st &= \quad\;\; 52 \\
pq &= 84 - 52 = 32 \\
pqst &= 3252 \\
69^3 &= 3252\cdot 101 + 57 \\
&= 328452 + 57 = 328509
\end{aligned}$$

Oder:

Man berechnet die einzelnen Teilprodukte sofort mit dem Stabe vollständig, wodurch die Auflösung der Kongruenz $x \equiv 69^3 \bmod 101$ überflüssig wird.

Beispiel: $x = 69^3$

$6^3 \equiv 14 \bmod 101$;	Ergänzungszahl	2;	$10^3\cdot\ 6^3 = 216\cdot\cdot\cdot$
$3\cdot 6^2\cdot 9 \equiv 63 \bmod 101$;	„ „	9;	$10^2\cdot 3\cdot 6^2\cdot 9 = \cdot 972\cdot\cdot$
$3\cdot 6\cdot 9^2 \equiv 44 \bmod 101$;	„ „	14;	$10\cdot 3\cdot 6^2\cdot 9^2 = \cdot 1458\cdot$
$9^3 \equiv 22 \bmod 101$;	„ „	22;	$9^3 = \cdot\cdot\cdot 729$
$69^3 \equiv 57 \bmod 101$			$69^3 = 328509$

Oder:

Man bildet $x = 69^2\cdot 69$.

$$69^2 \equiv 44 \bmod 101;\ \text{Ergänzungszahl } 47$$

$$69^2 = 4747 + 14 = 4761\cdot\cdot$$

$$69^3 = 4761\cdot 69$$

Man stellt die Ziffer 1 des Schiebers unter 69 und liest über 4, 7, 6, 1 die Reste 74, 79, 10, 69 unmittelbar ab.

$69\cdot 4 \equiv 74 \bmod 101$.	Ergänzungszahl	2;	$10^3\cdot 69\cdot 4 = 276\cdot\cdot\cdot$
$60\cdot 7 \equiv 79 \bmod 101$.	„ „	4	$10^2\cdot 69\cdot 7 = 483\cdot\cdot$
$69\cdot 6 \equiv 10 \bmod 101$.	„ „	4	$10\cdot 69\cdot 6 = 414\cdot$
$69\cdot 1 \equiv 69 \bmod 101$	„ „	0	$69\cdot 1 = 69$
			$69\cdot 4761 = 328509$

In analoger Weise lassen sich auch höhere Potenzen berechnen. Bequem sind noch zu ermitteln,

die 4, 5, 6, 7, ... 18^{te}	Potenz	von	2,
„ 4, 5, 6, 7, ... 10^{te}	„	„	3,
„ 4, 5, 6, 7, ... 9^{et}	„	„	4,
„ 4, 5, 6, 7^{te}	„	„	5,
„ 4, 5, 6^{te}	„	„	6,
„ 4, 5, 6 „	„	„	7,
„ 4, 5, 6 „	„	„	8,
„ 4, 5^{te}	„	„	9,
„ 4^{te}	„	„	11, 12, 13, ... 35.

§ 21.

Radizieren.

Einschlägig: Bei dem Stabe der Schieber,
bei der Scheibe der drehbare Ring.

Zum Radizieren sind die Sätze von § 3 und § 4 γ notwendig. Dieselben sagen aus:

1. Das Symbol $x \equiv \sqrt[n]{a}$ mod p hat nur dann einen Sinn, wenn $\sqrt[n]{a}$ rational und ganz ist.

2. Der Index einer Wurzel ist dem n^{ten} Teile von dem Index des Radikanden nach dem Modul p — 1 kongruent.

3. Die Kongruenz $ax \equiv b$ mod p hat d inkongruente Wurzeln, wenn der größte gemeinschaftliche Divisor d von a und p auch in b restlos enthalten ist. Da im gegebenen Falle $p - 1 = 100$, so kann d nur die Werte 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 annehmen, die eventuelle Kongruenz also nur 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 inkongruente Wurzeln haben.

Auf dem Apparate sind die Quadratwurzeln aus 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, die Kubikwurzeln aus 8, 27, 64, die vierten Wurzeln aus 16, 81, die fünfte Wurzel aus 32, die sechste Wurzel aus 64 unmittelbar abzulesen.

a) In welcher Weise der Rechenschieber für diese Fälle zu handhaben ist, zeigen die folgenden einfachen Beispiele:

1. $x \equiv \sqrt[5]{32}$

$$\text{Ind } x \equiv \text{Ind } \sqrt[5]{32} \text{ mod } 100 \equiv \frac{1}{5} \text{ Ind } 32 \text{ mod } 100.$$

Man sucht in der Reihe N_1 (oder auch in der Indextafel) die Zahl 32 und liest den darunterstehenden Index 5 ab.

Folglich: $\text{Ind } x \equiv \frac{1}{5} \cdot 5 \text{ mod } 100$, oder

$5 \text{ Ind } x \equiv 5 \text{ mod } 100.$

Da diese Kongruenz durch 5 dividiert werden kann, besitzt sie 5 inkongruente Wurzeln, nämlich

$$\begin{aligned} 5 \text{ Ind } x_1 &\equiv 5 \text{ mod } 100 \\ 5 \text{ Ind } x_2 &\equiv 105 \ „ \\ 5 \text{ Ind } x_3 &\equiv 205 \ „ \\ 5 \text{ Ind } x_4 &\equiv 305 \ „ \\ 5 \text{ Ind } x_5 &\equiv 405 \ „ \end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \text{Ind } x_1 &\equiv 1 \\ \text{Ind } x_2 &\equiv 21 \\ \text{Ind } x_3 &\equiv 41 \\ \text{Ind } x_4 &\equiv 61 \\ \text{Ind } x_5 &\equiv 81 \end{aligned}\right\} \text{mod } 100; \quad \begin{aligned} x_1 &\equiv 2 \text{ mod } 101 \\ x_2 &\equiv 89 \ „ \\ x_3 &\equiv 72 \ „ \\ x_4 &\equiv 73 \ „ \\ x_5 &\equiv 67 \ „ \end{aligned}$$

Von allen diesen Wurzeln ist offenbar nur 2 brauchbar.

2. $x = \sqrt[2]{36}$

$$\text{Ind } x \equiv \sqrt[2]{36} \text{ mod } 100 \equiv \frac{1}{2} \text{ Ind } 36 \text{ mod } 100.$$

In der Reihe N_1 (oder auch in der Indextafel) steht unter 36 der Index 40.

Folglich: $\text{Ind } x \equiv \frac{1}{2} \cdot 40 \text{ mod } 100$

$2 \text{ Ind } x \equiv 40 \text{ mod } 100.$

Alle Glieder der Kongruenz sind durch 2 restlos teilbar; demnach besitzt diese 2 modulo 100 inkongruente Wurzeln, nämlich

$$\begin{aligned} 2 \text{ Ind } x_1 &\equiv 40 \text{ mod } 100 \\ 2 \text{ Ind } x_2 &\equiv 140 \ „ \quad \text{oder} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ind } x_1 \equiv 20\\ \text{Ind } x_2 \equiv 70\end{array}\right\}\text{ mod } 100;\quad \begin{array}{l} x_1 \equiv 95 \text{ mod } 101 \equiv -6 \text{ mod } 101\\ x_2 \equiv 6 \text{ mod } 101.\end{array}$$

Also $\sqrt[2]{36} = \mp 6.$

2. $x = \sqrt[4]{81}$

$$\text{Ind } x \equiv \sqrt[4]{81} \text{ mod } 100 \equiv \frac{1}{4} \text{ Ind } 81 \text{ mod } 100.$$

In der Reihe N_1 (oder auch in der Indextafel) steht unter 81 der Index 76.

Folglich: $\text{Ind } x \equiv \frac{1}{4} \cdot 76 \text{ mod } 100$

$$4 \text{ Ind } x \equiv 76 \text{ mod } 100.$$

Alle Glieder der Kongruenz sind durch 4 restlos teilbar; demnach besitzt diese 4 modulo 100 inkongruente Wurzeln, nämlich

$$\begin{array}{l} 4 \text{ Ind } x_1 \equiv 76 \text{ mod } 100\\ 4 \text{ Ind } x_2 \equiv 176 \quad „\\ 4 \text{ Ind } x_3 \equiv 276 \quad „\\ 4 \text{ Ind } v_3 \equiv 376 \quad „\end{array}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ind } x_1 \equiv 19\\ \text{Ind } x_2 \equiv 44\\ \text{Ind } x_3 \equiv 69\\ \text{Ind } x_4 \equiv 94\end{array}\right\}\text{ mod } 100;\quad \begin{array}{llll} x_1 \equiv 98 & \text{mod } 101 & \equiv -3 & \text{mod } 101\\ x_2 \equiv 71 & \quad „ & \equiv -30 & \quad „\\ x_3 \equiv 3 & \quad „ & \equiv +3 & \quad „\\ x_4 \equiv 30 & \quad „ & \equiv +30 & \quad „\end{array}$$

Von diesen 4 Werten gelten offenbar nur $x_1 = \mp 3$, weil $(\mp 30)^4$ auf eine Null und nicht auf eine 1, wie es sein muß, endigt.

β) Ganz analog werden alle Irrationalitäten von der Form $\sqrt[m]{(10a+b)^m}$ behandelt. Z. B.:

1. $x = \sqrt[2]{7921}$

$$x \equiv \sqrt[2]{7921} \text{ mod } 101 \equiv \sqrt[2]{-58} \text{ mod } 101 \equiv \sqrt[2]{43} \text{ mod } 101.$$

$$\text{Ind } x \equiv \frac{1}{2} \text{ Ind } 43 \text{ mod } 100 \equiv \frac{1}{2} \cdot 42 \text{ mod } 100.$$

$2 \text{ Ind } x \equiv 42 \text{ mod } 100;$ $\text{Ind } x_1 \equiv 21 \text{ mod } 50;$ oder $x_1 \equiv +89 \text{ mod } 101.$

$2 \text{ Ind } x_2 \equiv 142 \text{ mod } 100;$ $\text{Ind } x_2 \equiv 71 \text{ mod } 50;$ oder $x_2 \equiv 12 \text{ mod } 101 \equiv -89 \text{ mod } 101.$

$$x = \pm 89.$$

2. $x = \sqrt[5]{1934917632}$

$$\begin{aligned} x &\equiv \sqrt[5]{1934917632} \text{ mod } 101\\ &\equiv \sqrt[5]{(19+91+32-34-76)} \text{ mod } 101.\\ x &\equiv \sqrt[5]{32} \text{ mod } 101.\end{aligned}$$

$$\text{Ind } x \equiv \frac{1}{5} \cdot \text{Ind } 32 \text{ mod } 100.$$

$$5 \text{ Ind } x \equiv \text{Ind } 32 \text{ mod } 100 \equiv 5 \text{ mod } 100.$$

Die Kongruenz hat 5 modulo 100 inkongruente Wurzeln:

$$\begin{array}{l} 5 \text{ Ind } x_1 \equiv 5 \text{ mod } 100;\\ 5 \text{ Ind } x_2 = 105 \quad „ \quad ;\\ 5 \text{ Ind } x_3 = 205 \quad „ \quad ;\\ 5 \text{ Ind } x_4 = 305 \quad „ \quad ;\\ 5 \text{ Ind } x_5 = 405 \quad „ \quad ;\end{array}$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ind } x_1 \equiv 1\\ \text{Ind } x_2 \equiv 21\\ \text{Ind } x_3 \equiv 41\\ \text{Ind } x_4 \equiv 61\\ \text{Ind } x_5 \equiv 81\end{array}\right\}\text{ mod } 100;\quad \begin{array}{l} x_1 \equiv 32 \text{ mod } 101.\\ x_2 \equiv 89 \quad „\\ x_3 \equiv 72 \quad „\\ x_4 = 73 \quad „\\ x_5 = 67 \quad „\end{array}$$

Von allen diesen Werten ist nur $x_3 = 72$ gültig, weil die 5. Potenz der Einerstelle eine 2 sein muss. Die noch in betracht kommende Zahl 32 fällt weg, weil die 5. Potenz der Zehnerstelle mit 3 und nicht mit 1, wie es sein muß, beginnt.

Aber auch jene Irrationalitäten von der Form

$$\sqrt[m]{(100a+10b+c)^m}$$

können noch leicht ermittelt werden. Z. B.:

1. $$x = \sqrt[2]{128881}$$

$$x \equiv \sqrt[2]{12+81-88} \bmod 101 \equiv \sqrt[2]{5} \bmod 101.$$

$$\text{Ind } x \equiv \frac{1}{2} \text{ Ind } 5 \bmod 100 \equiv \frac{1}{2} \cdot 24 \bmod 100.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 \text{ Ind } x_1 \equiv 24 \bmod 100; \ \text{Ind } x_1 \equiv 12 \\ 2 \text{ Ind } x_2 \equiv 124 \quad „ \quad ; \ \text{Ind } x_2 \equiv 62 \end{array}\right\} \bmod 100;$$

$$x_1 \equiv 56 \bmod 101$$
$$x_2 \equiv 45 \bmod 101 \equiv -56 \bmod 101.$$

Nun erkennt man, daß $\sqrt[2]{128881}$ eine dreizifferige Zahl ist, die mit 3 beginnen muß; also $x_1 = 3 \cdot 101 + 56 = 359$

$$x_2 = -3 \cdot 101 - 56 = -359.$$

2. $$x = \sqrt[7]{156517258339252096}$$

$$x \equiv \sqrt[7]{(15+17+83+25+96)-(65+25+39+20)} \bmod 101$$
$$\equiv \sqrt[7]{87} \bmod 101.$$

$$\text{Ind } x \equiv \frac{1}{7} \text{ Ind } 87 \bmod 100 \equiv \frac{1}{7} \cdot 60 \bmod 100.$$

$$7 \text{ Ind } x \equiv 60 \bmod 100.$$

Die Kongruenz hat nur eine Wurzel, weil 7, 60 und 100 außer 1 keinen gemeinschaftlichen Teiler besitzen. Mit ihr sind gleichberechtigt

$$7 \text{ Ind } x \equiv 60 \equiv 160 \equiv 260 \equiv 360 \equiv 460 \equiv 560 \bmod 100.$$

Von diesen Kongruenzen hat nur $7 \text{ Ind } x \equiv 560 \bmod 100$ Bedeutung. Sie führt zu $\text{Ind } x \equiv 80 \bmod 101$, woraus $x \equiv 84 \bmod 101$ folgt.

Teilt man nun den Radikanden von rechts nach links in Gruppen von je 7 Ziffern, so erkennt man, daß die letzte Gruppe 1565 swischen 2^7 und 3^7 liegt. Demgemäß ist

$$x = 2 \cdot 101 + 84 = 286.$$

2. $$x = \sqrt[3]{371,694\,959}$$

$$x' \equiv \sqrt[3]{(3+69+59)-(71+49)} \bmod 101$$
$$\equiv \sqrt[3]{131-120} \bmod 101 \equiv \sqrt[3]{11} \bmod 101.$$

$$\text{Ind } x' \equiv \frac{1}{3} \text{ Ind } 11 \bmod 100 \equiv \frac{1}{3} \cdot 13 \bmod 100.$$

$$3 \text{ Ind } x' \equiv 13 \bmod 100.$$

Auch diese Kongruenz hat nur eine Wurzel und mit ihr sind gleichberechtigt:

$$3 \text{ Ind } x' \equiv 13 \bmod 100 \equiv 113 \bmod 100 \equiv 213 \bmod 100.$$

Von ihnen ist nur die letzte giltig. Man erhält

$$3 \text{ Ind } x' \equiv 213 \bmod 100$$
$$\text{Ind } x' \equiv 71 \bmod 100$$
$$x' \equiv 12 \bmod 101.$$

$x' = \sqrt[3]{371694959}$ liegt zwischen 700 und 800, also

$$x' = 7 \cdot 101 + 12 = 719$$
$$x = 7{,}19.$$

γ) Irrationalitäten von der Form $\sqrt[m]{(1000a+100b+10c+d)^m}$ können etwa wie das folgende Beispiel behandelt werden:

$$x = \sqrt[2]{19263321}$$
$$x \equiv \sqrt[2]{19263321} \bmod 101$$
$$\equiv \sqrt[2]{(21+26)-(19+33)} \bmod 100$$
$$x \equiv \sqrt[2]{-5} \bmod 101 \equiv \sqrt[2]{96} \bmod 101.$$

$$\text{Ind } x \equiv \frac{1}{2} \text{ Ind } 96 \bmod 100 \equiv \frac{1}{2} \cdot 74 \bmod 100.$$

$$2 \text{ Ind } x_1 \equiv 74 \bmod 100; \quad 2 \text{ Ind } x_2 \equiv 174 \bmod 100$$
$$\text{Ind } x_1 \equiv 37 \bmod 100; \quad \text{Ind } x_2 \equiv 87 \bmod 100.$$

Der Index von x hat also die 2 nach dem Modul 100 inkongruente Werte 37 und 87. Demnach ist

$$x_1 \equiv 55 \bmod 101 \equiv -46 \bmod 101$$
$$x_2 \equiv 46 \bmod 101.$$

x selbst ist eine 4zifferige Zahl, also nach Abzug des Restes von der Form pqpq. Teilt man den Radikanden von rechts nach links in Gruppen von je 2 Ziffern, so erkennt man, daß x zwischen 4000 und 5000 und zwar näher an 4000 liegt, daher ist $x = 4$.

Um q zu bestimmen, hat man zu beachten, daß x^2 auf 1 endigt.

Die Einerstelle von x muß daher entweder 1 oder 9 sein.

Ist sie 1, so ergibt sich für die Ergänzungszahl q der Wert 5; mithin

$$x_1 = -4545 - 46 = -4591, \text{ resp.}$$
$$x_2 = 4545 + 46 = +4591.$$

Ist sie 9, so ergibt sich für die Ergänzungszahl q der Wert 3; mithin

$$x_1 = -4343 - 46 = -4389$$
$$x_2 = 4343 + 46 = +4389.$$

Nach der obigen Bemerkung kann nur der letzte Wert von

$$x = \mp 4389$$

der richtige sein.

An dem nachfolgenden, aus der Aufgabensammlung von Heiß entlehnten Beispiele wollen wir noch zeigen, daß auch kompliziertere Fälle mit dem Rechenstabe verhältnismäßig rasch erledigt werden können.

$$x = \sqrt[9]{322\,687\,697\,779 \times 794\,280\,046\,581}$$

$$x = \sqrt[9]{[(26+69+79)-(32+87+77)]\times[(81+04+42)-(65+80+79)]} \text{ mod } 101.$$

$$\equiv \sqrt[9]{79 \cdot 4} \text{ mod } 101 \equiv \sqrt[9]{316} \text{ mod } 101 \equiv \sqrt[9]{13} \text{ mod } 101.$$

$$\text{Ind}\, x \equiv \frac{1}{9} \text{ Ind } 13 \text{ mod } 100 \equiv \frac{1}{9} \cdot 66 \text{ mod } 100.$$

$$9 \text{ Ind } x \equiv 66 \text{ mod } 100.$$

Es ist aber auch

$$9 \text{ Ind } x \equiv 166 \equiv 266 \equiv 366 \equiv 466 \equiv 566 \equiv 666 \text{ mod } 100.$$

Von allen diesen Kongruenzen ist nur

$$9 \text{ Ind } x \equiv 666 \text{ mod } 100$$

brauchbar. Diese führt zu

$$\text{Ind } x \equiv 74 \text{ mod } 100.$$
$$x \equiv 96 \text{ mod } 101.$$

Der genaue Wert von x ist eine dreizifferige Zahl, weil der Radikand grösser als 10^{18} und kleiner als 10^{27}. x hat demnach die Form pop.

Um p zu ermitteln, beachte man, daß die Einerstelle von x^9 eine 9 ist.

Unter den neunten Potenzen aller Zahlen 1, 2, 3, . . . 9 endigt nur 9^9 auf die Ziffer 9; also ist p selbst $9 - 6 = 3$ und

$$x = 3 \cdot 101 + 96 = 399.$$

§ 22.

Potenzreste.

Die Zahlen a, für welche die binomische Kongruenz $x^n \equiv a$ mod p (p zunächst als Primzahl gedacht) möglich ist, heißen Potenzreste. Durch den Übergang zu der Kongruenz

$$n \text{ Ind } x \equiv \text{Ind } a \text{ mod } p - 1.$$

ersieht man, daß $x^n \equiv a$ mod p nur bestehen kann, wenn n ein Teiler von Ind a ist. Für den Rechenstab mit der Basis 101 sind daher

quadratische Reste nur jene Zahlen, deren Index durch 2,
kubische „ „ „ „ „ „ „ 3 etc.
biquadratische „ „ „ „ „ „ „ 4,
n^{te} „ „ „ „ „ „ „ n restlos
teilbar sind.

Quadratische Reste modulo 101 sind: 1, 4, 16, 64, 54, 14, 56, 22,...
Kubische „ „ „ : 1, 8, 64, 7, 56, 44, 49, 89,...
Biquadratische „ „ „ : 1, 54, 56, 88, 95, 5, 80, ...
. . . .
25^{te} Reste „ „ „ : 1, 10, 100, 91. etc.

Z. B. Für welche Zahl ist 90 ein siebenter Potenzrest modulo 101.

$$x^7 \equiv 90 \text{ mod } 101$$
$$7 \text{ Ind } x \equiv \text{Ind } 90 \text{ mod } 100$$
$$\equiv 63 \text{ mod } 100$$
$$\text{Ind } x \equiv 9 \text{ mod } 100$$
$$x \equiv 7 \text{ mod } 101$$
$$\text{Antw.: } 7^7 \equiv 90 \text{ mod } 101.$$

§ 23.

Gemischt quadratische Kongruenzen.

Jede gemischt quadratische Kongruenz

$$ax^2 + bx + c \equiv o \bmod p.$$

läßt sich in eine rein quadratische verwandeln.

Da p als Primzahl vorausgesetzt wird, muß a zu p prim sein, weil sonst ax^2 wegfallen würde. Man bestimmt nun eine Zahl α, welche der Kongruenz $a\alpha \equiv 1 \bmod p$ genügt.

$$\text{Ind } a + \text{Ind } \alpha \equiv o \bmod p - 1.$$

$$\text{Ind } \alpha \equiv - \text{Ind } a \bmod p \equiv 1.$$

Mit dieser multipliziert man die gegebene Kongruenz

$$\alpha a x^2 + \alpha b x + \alpha c \equiv o \bmod p.$$

αa hat jetzt den Rest 1; der Rest von αb kann immer zu einer geraden Zahl gemacht werden; denn ist er ungerade, so kann man dafür den negativen Rest $-(p - \beta)$ setzen. Man erhält

$$x^2 + \alpha b + \alpha c \equiv o \bmod p$$

$$\left(x + \frac{\alpha b}{2}\right)^2 - \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + ac \equiv o \bmod p$$

$$\left(x + \frac{ab}{2}\right)^2 \equiv \left(\frac{\alpha b}{2}\right)^2 - ac \bmod p.$$

Z. B. $7x^2 - 5x - 17 \equiv o \bmod 101.$

$$7\alpha \equiv 1 \bmod 101$$

$$\text{Ind } 7 + \text{Ind } \alpha \equiv o \bmod 100$$

$$\text{Ind } \alpha \equiv - \text{Ind } 7 \bmod 100 \equiv -9 \bmod 100 \equiv 91 \bmod 100$$

$$\alpha = 29 + k \cdot 101.$$

Durch Multiplikation mit 29 geht die gegebene Kongruenz in

$203x^2 - 145x - 493 \equiv o \bmod 101$ über

oder: $x^2 - 44x - 89 \equiv o \bmod 101$

$$(x - 22)^2 - 484 - 89 \equiv o \bmod 101$$

$$(x - 22)^2 \equiv 573 \bmod 101 \equiv 68 \bmod 101$$

$$2 \text{ Ind } (x - 22) \equiv \text{Ind } 68 \bmod 100 \equiv 32 \bmod 100$$

$$\text{Ind } (x - 22) \equiv 16 \bmod 100$$

$$x_1 - 22 \equiv 88 \bmod 101; \qquad x_1 = 110$$

$$x_2 - 22 \equiv 13 \bmod 101; \qquad x_2 = 35.$$

§ 24.

Logarithmen.

Auch für die Einführung in die Lehre der Logarithmen können Rechenstab und Rechenscheibe mit Vorteil benutzt werden.

Es sei ${}^{b}\log a = x$, dann ist

$$b^x = a.$$

$$b^x \equiv a \bmod 101 \text{ und}$$

$$\text{Ind } (b^x) \equiv \text{Ind } a \bmod 100$$

$$x \cdot \text{Ind } b \equiv \text{Ind } a \bmod 100$$

$$x \equiv \frac{\text{Ind } a}{\text{Ind } b} \bmod 100$$

Also $${}^{b}\log a \equiv \frac{\text{Ind } a}{\text{Ind } b} \bmod 100, \text{ d. h.}$$

der Logarithmus von a zur Basis b ist kongruent einem Quotienten, dessen Zähler der Index von a und dessen Nenner der Index von b mod 100 ist. In bezug auf diese Kongruenz gelten natürlich alle im § 1 und 4 zusammengestellten Regeln und Einschränkungen.

Z. B. 1. ${}^{2}\log 4096 = x$

$$2^x = 4096$$

$$2^x \equiv 4096 \bmod 101$$

$$4096 \equiv 56 \bmod 101$$

$$2^x \equiv 56 \bmod 101$$

$$x \text{ Ind } 2 \equiv \text{Ind } 56 \bmod 100.$$

Für Ind 2 und Ind 56 gibt der Apparat die Zahlen 1, resp. 12 an. Also

$$x \cdot 1 \equiv 12 \bmod 100$$

$x = 12$ kann nur genügen.

2. ${}^{125}\log \frac{1}{5} \equiv x$

$$125^x = \frac{1}{5}$$

$$125^x \equiv \frac{1}{5} \bmod 101$$

$$125 \equiv 24 \mod 101$$

$$24^{x} \equiv \frac{1}{5} \mod 101$$

$$x \cdot \mathrm{Ind}\, 24 \equiv \mathrm{Ind}\, \frac{1}{5} \mod 100$$

$$\equiv \mathrm{Ind}\, 1 - \mathrm{Ind}\, 5 \mod 100$$

$$x \cdot 72 \equiv -24 \mod 100$$

$$x \equiv -\frac{1}{3} \mod 100$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ kann nur gelten.}$$

Auch die für $\log(ab)$, $\log\left(\frac{a}{b}\right)$, $\log(a^n)$, $\log\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)$ etc. gültigen Gesetze lassen sich unter den gemachten Voraussetzungen mittelst des Apparates nachweisen. Ebenso kann eine große Gruppe von Exponentialgleichungen auf diese Art aufgelöst werden.

Z. B. $$0{,}04^{x} \cdot \sqrt[5]{32\,768^{x+1}} = 3{,}2\sqrt{2}$$

$$32\,768 \equiv 44 \mod 100$$

$$x \cdot (\mathrm{Ind}\, 4 - \mathrm{Ind}\, 100) + \frac{x+1}{5}\, \mathrm{Ind}\, 44 \equiv \mathrm{Ind}\, 32 - \mathrm{Ind}\, 10$$

$$+ \frac{1}{2}\, \mathrm{Ind}\, 2 \mod 100$$

$$x \cdot (2 - 50) + \frac{x+1}{5} \cdot 15 \equiv 5 - 25 + \frac{1}{2} \mod 100$$

$$-x \cdot 48 + 3 \cdot (x+1) \equiv -\frac{39}{2} \mod 100$$

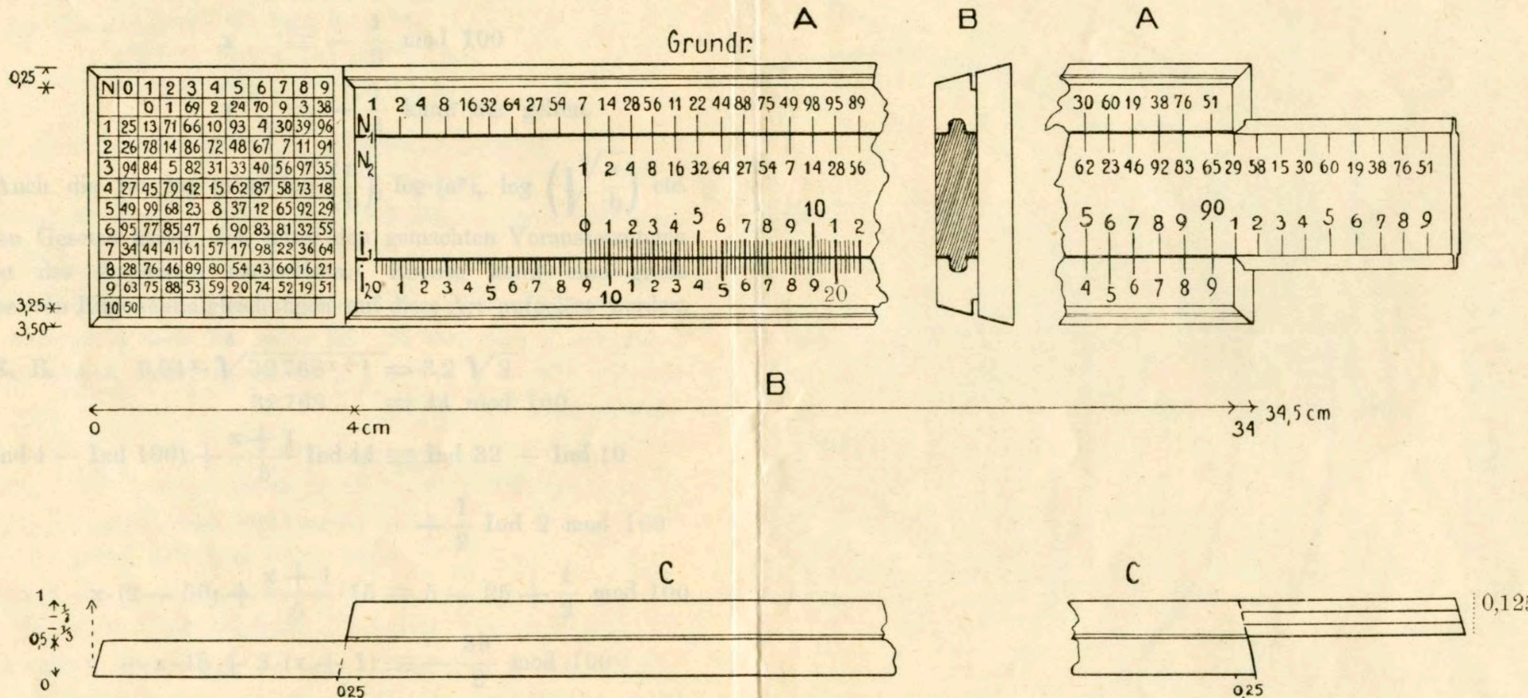
$$x \equiv \frac{1}{2} \mod 100$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

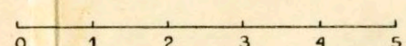
München im Februar 1908.

Rechenstab

1



Masst. 1:1.



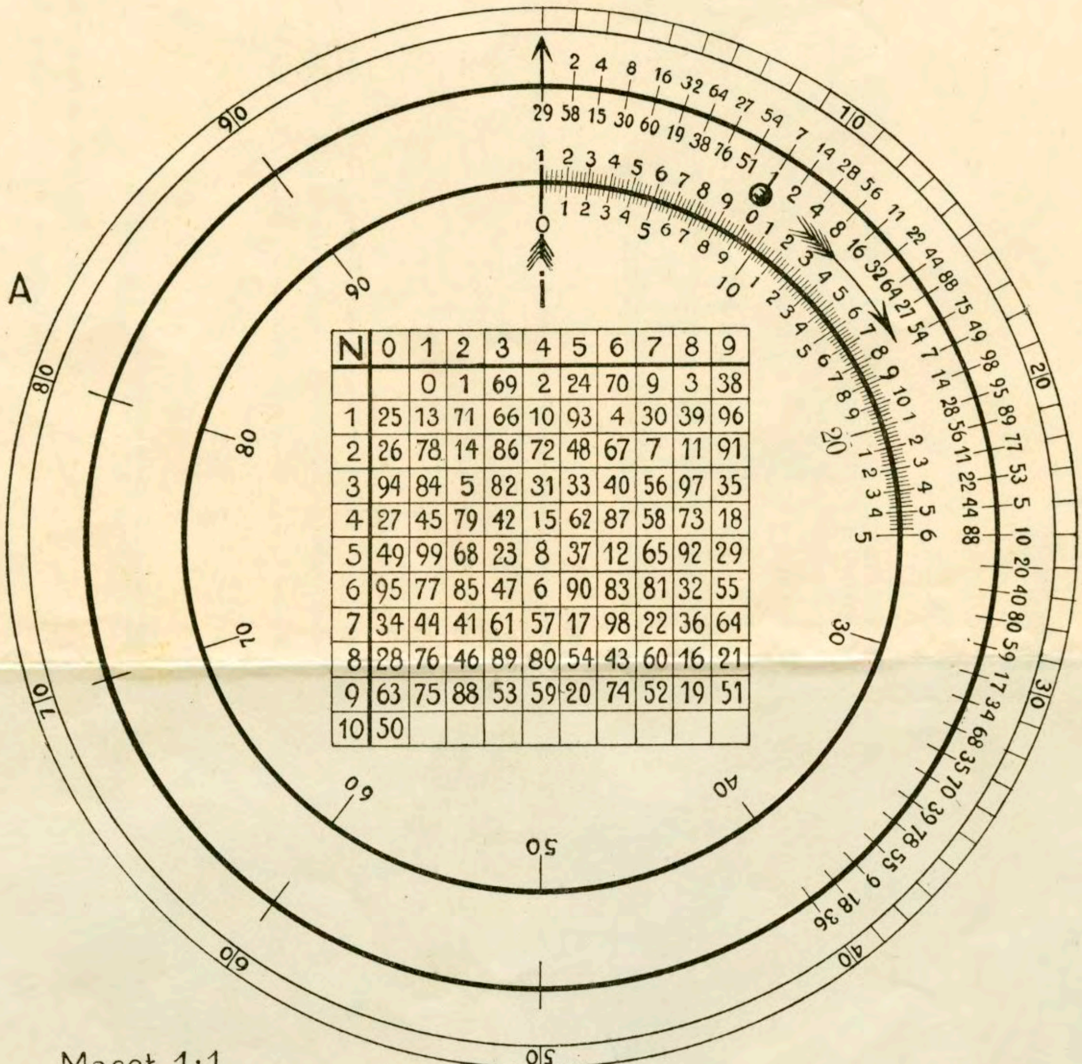
D.R.G.M.S. Nr. 344576.

Aus Schumachers Rechenstab.

J. Lindauersche Buchhandlung (Schöpping).

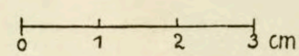
Rechenscheibe

A

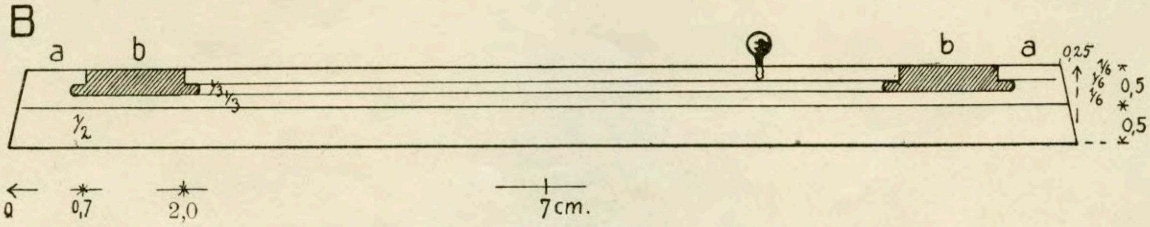


N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		0	1	69	2	24	70	9	3	38
1	25	13	71	66	10	93	4	30	39	96
2	26	78	14	86	72	48	67	7	11	91
3	94	84	5	82	31	33	40	56	97	35
4	27	45	79	42	15	62	87	58	73	18
5	49	99	68	23	8	37	12	65	92	29
6	95	77	85	47	6	90	83	81	32	55
7	34	44	41	61	57	17	98	22	36	64
8	28	76	46	89	80	54	43	60	16	21
9	63	75	88	53	59	20	74	52	19	51
10	50									

Masst. 1:1



B



D.R.G.M.S. Nr. 344576.

Aus Schumachers Rechenstab.
J. Lindauersche Buchhandlung (Schöpping).