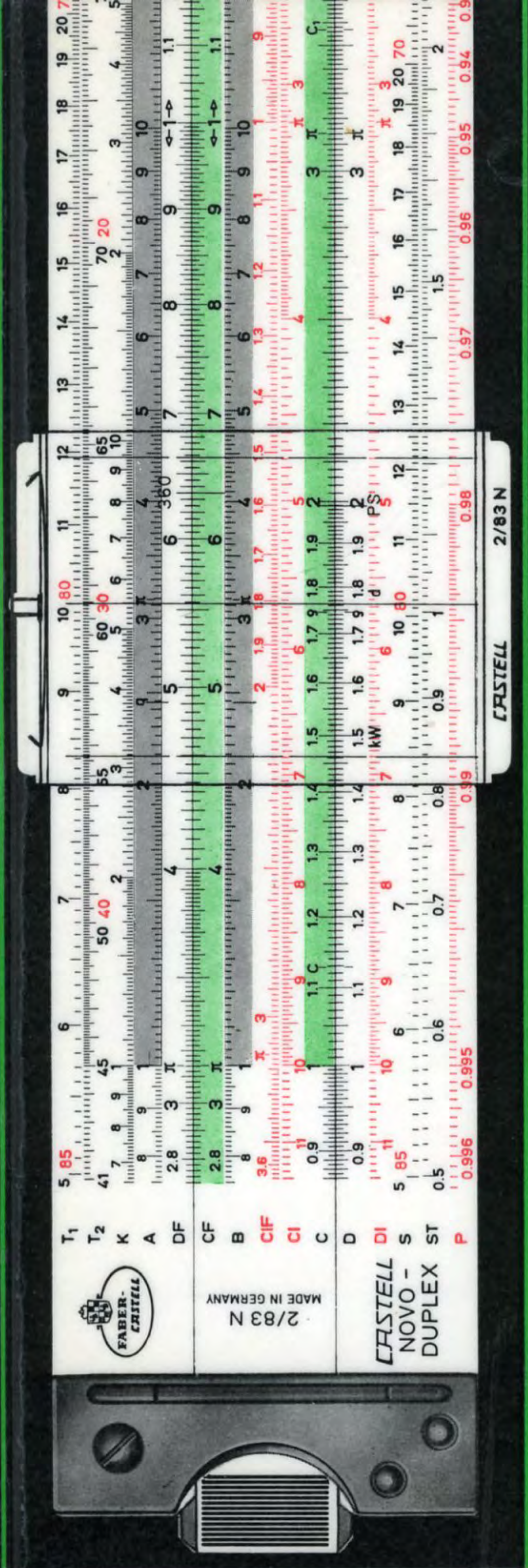


S. PETRY

Stabrechnen mit Novo-Duplex 2/83N und Duplex 2/82N

FABER-CASTELL

Vorwort

Herausgeber und Verfasser haben sich die Aufgabe gestellt, ein modernes Lehr- und Arbeitsbuch zu schaffen, das den Benutzer zur sicheren Beherrschung des Stabrechnens führt. Diesem Zweck dienen zahlreiche Abbildungen und Beispiele, sowie eine große Anzahl von Übungsaufgaben mit Lösungen, die eine objektive Kontrolle der erzielten Fortschritte ermöglichen. Es wurde bewußt auf jede Erörterung der theoretischen Grundlagen des Stabrechnens verzichtet, auch wird deren Kenntnis nicht vorausgesetzt, da sie zum praktischen Rechnen nicht benötigt werden. Alle Beispiele und Übungsaufgaben sind weitgehend abstrakt-mathematisch; „praxisnahe" technische und eingekleidete Aufgaben fehlen fast ganz, da angenommen werden kann, daß der Leser die für seine speziellen Bedürfnisse nötigen mathematisch-physikalischen Kenntnisse entweder schon besitzt oder sich aus der einschlägigen Literatur beschaffen kann, und daß er von einem Lehrbuch des Stabrechnens nur Auskunft darüber erwartet, wie einfachere und kompliziertere Rechenoperationen mit dem Rechenstab möglichst schnell, sicher und genau ausgeführt werden können.

Damit dieses Buch Ihnen den gewünschten Erfolg bringt, beherzigen Sie bitte folgende Ratschläge:

1. Nehmen Sie **immer**, wenn Sie mit dem Buch arbeiten, Ihren Rechenstab zur Hand und verfolgen Sie damit alle beschriebenen Operationen.

2. Gehen Sie nie zu einem neuen Abschnitt weiter, bevor Sie nicht den Stoff des vorausgegangenen sicher beherrschen. Arbeiten Sie dazu, wenn nötig, die Übungsaufgaben mehrfach durch und gehen Sie erst weiter, wenn Sie die Aufgaben der Arbeitsblätter fehlerfrei lösen können.

3. Bedenken Sie immer:

Stabrechnen ist Übungssache!

Oberbaurat Siegfried Petry
Balthasar-Neumann-Polytechnikum
Würzburg

Würzburg, im März 1970

Inhalt

1. Allgemeines

1.1 Beschreibung des Rechenstabes

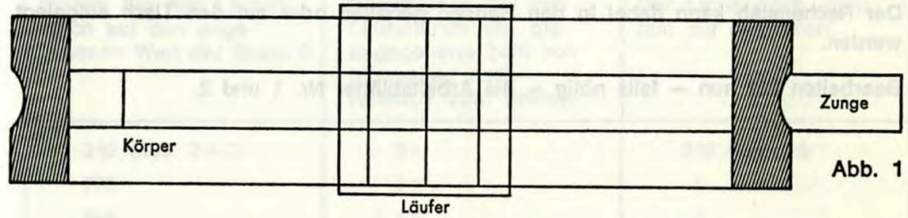


Abb. 1

Der Körper besteht aus den beiden Stabkörperwangen, die durch vier Laschen miteinander verbunden sind. Nötigenfalls können nach Lösen zweier Schrauben an diesen Laschen die Stabkörperwangen und die Gängigkeit des Schiebers justiert werden. Durch die in die Laschen eingelegten Gummistege bleiben Schieber und Läufer auch dann frei beweglich, wenn der Stab auf einer ebenen Unterlage liegt.

Am linken Stabende steht neben jeder Skala ihre genormte Bezeichnung (z. B. T_1, T_2, K, A, usw.). Diese Bezeichnungen werden später bei der Beschreibung der Rechenoperationen benutzt. Rechts neben jeder Skala befindet sich ein mathematisches Formelzeichen (z. B. x^2, x^3, $\frac{10}{x}$), das die Beziehung der betreffenden Skala zu einer der beiden Grundskalen C oder D beschreibt, die am rechten Ende das Zeichen „x" tragen. Der Läufer verbindet durch den langen, durchgehenden Strich jeweils in der Mitte der Vorder- und Rückseite die Skalen auf beiden Seiten des Rechenstabes miteinander und ermöglicht während der Rechnung den Übergang von der Vorderseite auf die Rückseite des Stabes und umgekehrt. Die Bedeutung der unterbrochenen und der kurzen Läuferstriche wird später erklärt.

Die Unterteilung der Hauptskalen wird auf den Schaubildern im Anhang dieses Buches genau beschrieben. Im übrigen wird auf die einschlägigen Abschnitte der Anleitung hingewiesen, die jedem Rechenstab beigegeben ist.

Besonders wichtig ist, daß die Beschriftungen der meisten Skalen (auf Ausnahmen wird jeweils hingewiesen) reine Ziffernfolgen ohne Stellenwert sind. So kann z. B. die Ziffer 4 der Skala D beim Rechnen für die Zahlen 4; 40; 400; usw. aber auch für 0,4; 0,04; 0,004 usw. stehen.

Die absolut sichere Beherrschung des Einstellens und Ablesens auf den Skalen ist eine unerläßliche Voraussetzung für schnelles und zuverlässiges Stabrechnen.

Der Einübung und der Kontrolle dieser Fertigkeiten dienen die Arbeitsblätter Nr. 1 und 2.

Zum Einstellen des Läuferstrichs* auf einen bestimmten Wert wird der Läufer zunächst mit e i n e r Hand in die Nähe des einzustellenden Wertes gebracht und dann zwischen die beiden Daumen gefaßt, die an der unteren (dem Benutzer zugewandten) Schmalseite des Stabkörpers entlanggleiten. Dabei können auch noch die beiden Zeigefinger an der oberen Schmalseite zu Hilfe genommen werden. Auf diese Weise läßt sich der Läuferstrich schnell und genau auf den gewünschten Wert einstellen.

Der Rechenstab kann dabei in den Händen gehalten oder auf den Tisch aufgelegt werden.

Bearbeiten Sie nun – falls nötig – die Arbeitsblätter Nr. 1 und 2.

* hier ist im laufenden Text, wenn kein besonderer Hinweis erfolgt, immer der mittlere, durchgehende Läuferstrich gemeint.

Arbeitsblatt Nr. 1

Es wird empfohlen, zuerst a l l e Aufgaben zu lösen und die Ergebnisse mit weichem Bleistift an der vorgesehenen Stelle einzutragen. Dann erst beginne man mit der Kontrolle der Lösungen. Wenn nötig, können die Ergebnisse ausradiert und die Übungen wiederholt werden. Erst nach sicherer Beherrschung des erarbeiteten Stoffes sollte im Lehrgang fortgefahren werden.

Stellen Sie den Läuferstrich auf den angegebenen Wert der Skala D	Verschieben Sie den Läuferstrich um die angegebene Zahl von Intervallen nach rechts(r) bzw. links(l)	Der Läuferstrich steht nun auf dem Wert
242 (lies: 2-4-2)	3 r	248 (Muster)
775	4 r	1. ....
905	3 l	2. ....
378	3 r	3. ....
162	3 l	4. ....
455	5 r	5. ....
109	2 r	6. ....
815	4 l	7. ....
101	4 l	8. ....
111	3 r	9. ....
990	4 r	10. ....
505	2 l	11. ....
286	3 r	12. ....
665	3 l	13. ....
790	3 r	14. ....
895	2 r	15. ....
425	3 l	16. ....
107	4 l	17. ....
202	3 r	18. ....
320	3 l	19. ....
805	2 r	20. ....
199	2 r	21. ....
308	3 l	22. ....
112	4 l	23. ....
735	3 r	24. ....

Ergebnisse: 1. 795; 2. 890; 3. 384; 4. 159; 5. 480; 6. 111; 7. 795; 8. 985; 9. 114; 10. 102; 11. 495; 12. 292; 13. 650; 14. 805; 15. 905; 16. 410; 17. 103; 18. 208; 19. 314; 20. 815; 21. 202; 22. 302; 23. 108; 24. 750.

Arbeitsblatt Nr. 2

Für kombinierte Einstell- und Ableseübungen mit zu schätzenden Zwischenwerten benutzen wir nun außer der Skala D auch die Skala DF (beim Castell-Duplex auf der Rückseite).

Diese ist genau so unterteilt wie Skala D, jedoch ist auf ihr der Wert 1 etwa zur Skalenmitte verschoben. (Wie später noch erläutert wird, ergibt der Übergang von Skala D senkrecht nach oben auf Skala DF eine Multiplikation des auf D eingestellten Wertes mit dem Faktor π).

Stellen Sie den Läuferstrich auf den angegebenen Wert der Skala D	Unter dem Läuferstrich steht dann auf Skala DF der Wert
515 (lies: 5-1-5)	1619 (Muster)
710	1. ....
870	2. ....
915	3. ....
146	4. ....
203	5. ....
297	6. ....
365	7. ....
413	8. ....
477	9. ....
509	10. ....
641	11. ....
683	12. ....
7725	13. ....
9675	14. ....
1035	15. ....
1183	16. ....
1305	17. ....
1398	18. ....
1702	19. ....
1785	20. ....
2035	21. ....
2265	22. ....
291	23. ....
337	24. ....
320	25. ....

Ergebnisse (beachten Sie dabei das in Abschnitt 1.2 Gesagte!):

1. 223; 2. 2735; 3. 2875; 4. 459; 5. 638; 6. 933; 7. 1147; 8. 1297; 9. 1499; 10. 1599; 11. 2015; 12. 2145; 13. 2425; 14. 304; 15. 325; 16. 372; 17. 410; 18. 439; 19. 535; 20. 561; 21. 639; 22. 712; 23. 914; 24. 106; 25. 1005.

1.2. Die Genauigkeit des Stabrechnens

Infolge der logarithmischen Teilung des Rechenstabes ist der relative Fehler, der beim Einstellen oder Ablesen eines Wertes möglich ist, an jeder Stelle der Grundskalen gleich, und zwar bei einem Rechenstab mit 25 cm Teilungslänge etwa 1‰. Bei großer Sorgfalt und einiger Übung kann er bis auf etwa 0,5‰ herabgesetzt werden.

Bei einer Rechenoperation, die insgesamt n Einstellungen und Ablesungen erfordert, beträgt nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung

der maximale Fehler n ‰ bzw. $\frac{n}{2}$ ‰,

der wahrscheinliche Fehler $\sqrt{n}$ ‰ bzw. $\frac{\sqrt{n}}{2}$ ‰.

Dies ergibt für eine einfache Multiplikation oder Division, die aus zwei Einstellungen und einer Ablesung besteht, einen maximalen Fehler von 3‰ (bzw. 1,5‰) und einen wahrscheinlichen Fehler von $\sqrt{3}$‰ $\approx$ 1,5‰ (bzw. 0,75‰).

Diese Feststellungen sind bereits wichtig bei der Bearbeitung der Arbeitsblätter:

Beim Einstellen oder Ablesen auf den Grundskalen des Rechenstabs können 3 bis 4 Dezimalstellen berücksichtigt werden; am linken Ende vier, am rechten Ende drei. Dementsprechend werden auch die Lösungen der Übungsaufgaben mit 3 oder 4 geltenden Ziffern angegeben.

Sie sind mit einem Digitalrechner wesentlich höherer Genauigkeit berechnet und auf die jeweiligen Stellenzahl gerundet worden.

Wegen der unvermeidlichen Einstell- und Ablesefehler ist es jedoch möglich und z u l ä s s i g, daß die Ergebnisse des Bearbeiters der Aufgaben um 1 bis 2 Einheiten der letzten Stelle nach oben oder unten vom angegebenen Resultat abweichen.

Beispiel: Wenn ein Resultat mit 8,93 angegeben wird, so gelten auch die Werte 8,92 und 8,94 noch als richtig, bei umfangreicheren Rechnungen sogar alle Werte zwischen 8,91 und 8,95.

2. Multiplikation

2.1 Vorbemerkungen

Bei jeder Multiplikation (und anderen Rechenoperationen) muß die Zunge des Rechenstabes verschoben werden. Dafür hat sich folgendes Verfahren bewährt: Man legt den Stab auf den Tisch oder hält ihn zwischen den Händen. Dann bringt man die Zunge mit **e i n e r** Hand in die Nähe der gewünschten Stellung und nimmt dann die Feineinstellung mit den Fingerkuppen vor.

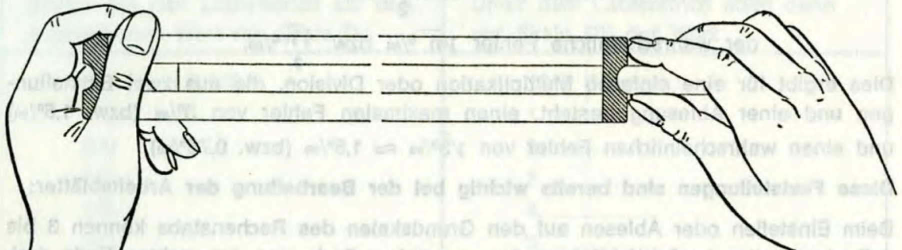


Abb. 2

Man vermeide dabei, die Stabkörperwangen zusammenzudrücken, da sich sonst die Zunge nur schwer oder gar nicht verschieben läßt.

Schwergängigkeit der Zunge kann meistens durch eine Spur reiner Vaseline oder Silikonöl beseitigt werden.

Zur Multiplikation werden zunächst die beiden Skalenpaare C/D und CF/DF (beim Castell-Duplex auf der Rückseite) benutzt. Das letztgenannte Skalenpaar hat die gleiche Teilung wie das erste, jedoch ist die ganze Skala um die Strecke π nach links verschoben, d. h. über der 1 auf Skala C bzw. D befindet sich der Wert π auf der Skala CF bzw. DF.

2.2 Rechenvorgang

$\boxed{a \cdot b}$

Die Multiplikation zweier Zahlen a und b geschieht nach folgendem Schema:

1. Mit dem Läuferstrich wird der Wert a (Beispiel: a = 2,7) auf Skala D eingestellt.
2. Liegt a auf der linken Hälfte der Skala D (rund: a links von 3), so wird die 1 am linken Ende der Skala C unter den Läuferstrich gestellt. Liegt dagegen a auf der rechten Hälfte der Skala D (rund: a rechts von 3), so wird die 10 am rechten Ende der Skala C unter den Läuferstrich gebracht (Beispiel: a = 6,3).

   Auf diese Weise braucht die Zunge nie um mehr als die Hälfte ihrer Länge verschoben zu werden und gleichzeitig wird das sonst häufig nötige Umsetzen (Durchschieben) der Zunge (von 1 auf 10 oder umgekehrt) mit Sicherheit vermieden. Man gewöhne sich daher von Anfang an an dieses zeitsparende Verfahren.

3. Nun wird der Läuferstrich über den Wert b auf einer der beiden grün unterlegten Skalen C oder CF gestellt, je nachdem wo dieser Wert am bequemsten, d. h. mit der geringsten Läuferbewegung zu erreichen ist, und wo er nicht über die anliegende Körperskala hinausragt. Auf dieser steht dann unter dem Läuferstrich das Produkt a · b.

Beispiel: a = 2,7 Es wird die Marke 1 von Skala C über 2,7 auf Skala D gestellt.

Kurzschreibweise: C 1 über D 2,7.

Noch kürzer: D 2,7 | C 1 (hier wird D 2,7 zuerst genannt, weil D 2,7 mit dem Läuferstrich zuerst eingestellt wird. Der senkrechte Strich zwischen D 2,7 und C 1 weist darauf hin, daß die beiden Werte senkrecht übereinander bzw. untereinander zu stellen sind).

1. Ist b = 3,2, so kann dieser Wert wahlweise auf C oder CF eingestellt werden; die Einstellung auf CF erfordert jedoch nur eine geringe Verschiebung des Läufers nach rechts und ist daher vorteilhafter. Ergebnis senkrecht darüber auf DF (bzw. senkrecht darunter auf D): 8,64.

   Kurzschreibweise: CF 3,2 | DF: 8,64 bzw. C 3,2 | D: 8,64

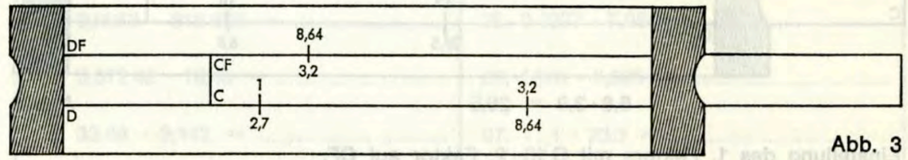


Abb. 3

2,7 · 3,2 = 8,64

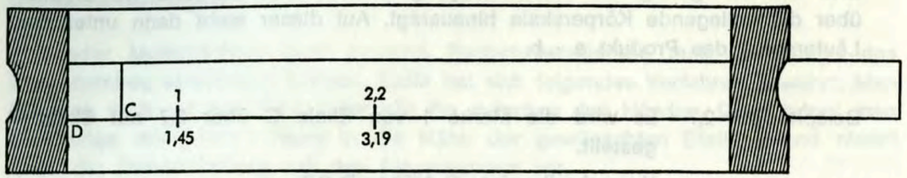
2. Für b = 1,5 kann dieser Wert nur auf Skala C eingestellt werden, da er auf Skala CF über die Skala DF hinausragt. Ergebnis: 4,05
   Umgekehrt kann
3. für b = 4,7 der Wert nur auf CF eingestellt werden. Ergebnis: 12,7.

Zusammenfassung:

Der erste Faktor wird auf Skala D eingestellt und C 1 oder C 10 darüber geschoben. Regel: Zunge nie mehr als zur Hälfte ausziehen! Der zweite Faktor wird auf einer grün unterlegten Skala (C oder CF) eingestellt und auf der anliegenden (weißen) Skala das Produkt abgelesen.

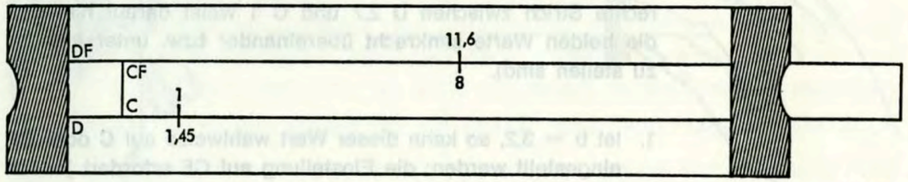
Die folgenden Abbildungen zeigen den Vorgang nochmals für verschiedene Fälle:

Einstellung des 1. Faktors mit C 1, 2. Faktor auf C.



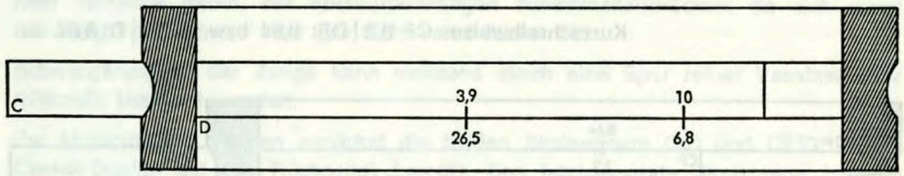
1,45 · 2,2 = 3,19 Abb. 4

Einstellung des 1. Faktors mit C 1, 2. Faktor auf CF.



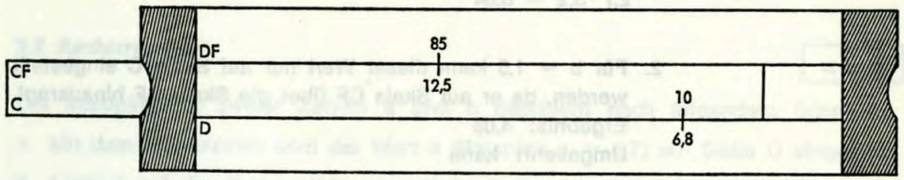
1,45 · 8 = 11,6 Abb. 5

Einstellung des 1. Faktors mit C 10, 2. Faktor auf C.



6,8 · 3,9 = 26,5 Abb. 6

Einstellung des 1. Faktors mit C 10, 2. Faktor auf CF.



6,8 · 12,5 = 85 Abb. 7

Ein zusätzlicher Tip:
Da die Reihenfolge der Faktoren beliebig ist (a · b = b · a), wird ein geschickter Stabrechner diejenige Zahl als ersten Faktor auf Skala D einstellen, bei der die Zunge am wenigsten zu verschieben ist.

Beispiele: 1. 2,92 · 1,28 = ?, günstiger: 1,28 · 2,92
2. 2,58 · 8,74 = ?, günstiger: 8,74 · 2,58 und Einstellung C 10

Bearbeiten Sie jetzt das Arbeitsblatt Nr. 3

Arbeitsblatt Nr. 3

Bei den folgenden Multiplikationsübungen kann die Größenordnung des Produkts (d. h. die Kommastellung in ihm) leicht ohne Hilfsmittel bestimmt werden.

1. 1,68 · 4,20 = ...	16. 90,4 · 1,083 = ...
2. 9,05 · 0,73 = ...	17. 11,04 · 39,9 = ...
3. 12,6 · 9,65 = ...	18. 6,91 · 303 = ...
4. 58,4 · 1,34 = ...	19. 123 030 · 0,775 = ...
5. 179 · 0,825 = ...	20. 1304 · 8,05 = ...
6. 0,0243 · 6,6 = ...	21. 912 · 4,66 = ...
7. 8460 · 0,73 = ...	22. 30,3 · 0,208 = ...
8. 0,001 04 · 4,66 = ...	23. 1,475 · 0,0864 = ...
9. 22 300 · 0,955 = ...	24. 0,693 · 106,5 = ...
10. 0,8953 · 319 000 = ...	25. 0,0277 · 7,08 = ...
11. 0,072 42 · 10,45 = ...	26. 5670 · 0,395 = ...
12. 33,86 · 9,142 = ...	27. 11,1 · 23,3 = ...
13. 644,8 · 0,1095 = ...	28. 404 · 0,152 = ...
14. 100,5 · 0,486 = ...	29. 0,764 · 0,595 = ...
15. 14,05 · 9,63 = ...	30. 138,5 · 8,86 = ...

Ergebnisse: 1. 7,06; 2. 6,61; 3. 121,6; 4. 78,3; 5. 147,7; 6. 0,1604; 7. 6180; 8. 0,004 85; 9. 21 300; 10. 286 000; 11. 0,757; 12. 309,5; 13. 70,6; 14. 48,85; 15. 135,3; 16. 97,9; 17. 440,5; 18. 2095; 19. 95 350; 20. 10 500; 21. 4250; 22. 6,30; 23. 0,1274; 24. 73,8; 25. 0,1961; 26. 2240; 27. 258,5; 28. 61,4; 29. 0,455; 30. 1227.

2.3 Bestimmung der Größenordnung des Produkts

Wie schon erklärt wurde, ist bei der Einstellung der Faktoren auf den Skalen die Kommastellung belanglos. Dementsprechend stellt auch das abgelesene Ergebnis nur eine Ziffernfolge dar, die Stellung des Kommas innerhalb dieser Ziffernfolge muß eigens bestimmt werden. Bei den Beispielen des Arbeitsblattes Nr. 3 ergaben sich daraus keine Probleme, weil die Größenordnung der Ergebnisse unmittelbar zu erkennen war. Dies ist jedoch nicht immer so, besonders wenn es sich um mehrfache Produkte oder kompliziertere Brüche handelt. Dann muß man zur Bestimmung der Kommastellung im Ergebnis eines der beiden folgenden Verfahren anwenden.

1. Verfahren: Die Größenordnung des Ergebnisses wird nach großzügiger Rundung der Zahlen (hier der Faktoren) geschätzt.

Beispiele: 1. $246 \cdot 0{,}065 \approx 200 \cdot \frac{6}{100} = 12$; Ergebnis: 16,0

2. $0{,}17 \cdot 0{,}093 \approx 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$; Ergebnis: 0,01581

3. $34 \cdot 896 \approx 30 \cdot 1000 = 30\,000$; Ergebnis: 30 450

Wichtiger Hinweis: Das Ergebnis des 3. Beispiels ist insofern nicht ganz korrekt, als es Stellen angibt, die nicht gesichert sind. Das genaue Resultat ist nämlich nicht 30 450, sondern 30 464, was jedoch am Rechenstab nicht mehr ablesbar ist. Um nicht eine übertriebene Genauigkeit vorzutäuschen, müßte das Ergebnis in der Form $3{,}045 \cdot 10^4$ angegeben werden.

Das nachfolgend beschriebene Verfahren schließt solche Mängel von selbst aus.

2. Verfahren: Sind die Faktoren sehr groß oder sind es Dezimalbrüche mit mehreren Nullen nach dem Komma, so wird die Schätzung unsicher und unbequem.

Beispiele: 1. $36\,400 \cdot 128\,000 = ?$

2. $0{,}034 \cdot 86\,120 = ?$

3. $0{,}0087 \cdot 0{,}000\,321 = ?$

In einem solchen Fall zerlegt man jeden Faktor in ein Produkt aus einem Dezimalbruch zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz.

Für die Zahlen der obenstehenden Beispiele ergibt das:

$$36\,400 = 3{,}64 \cdot 10^4; \quad 128\,000 = 1{,}28 \cdot 10^5$$
$$0{,}034 = 3{,}4 \cdot 10^{-2}; \quad 86\,120 = 8{,}612 \cdot 10^4$$
$$0{,}0087 = 8{,}7 \cdot 10^{-3}; \quad 0{,}000\,321 = 3{,}21 \cdot 10^{-4}$$

Die richtige Hochzahl (Exponent) der Zehnerpotenz findet man am einfachsten, indem man abzählt, um wieviel Stellen man das Komma nach links (positive Hochzahl) oder rechts (negative Hochzahl) verschieben muß, damit es hinter die vorderste Ziffer der betreffenden Ziffernfolge zu stehen kommt.

Beispiele: $3\,6\,4\,0\,0 = 3{,}64 \cdot 10^4$

Komma 4 Stellen nach links

$0\,,\,0\,0\,8\,7 = 8{,}7 \cdot 10^{-3}$

Komma 3 Stellen nach rechts

Nach dieser Umformung erfolgt die Berechnung, indem man die Dezimalbrüche mit dem Rechenstab multipliziert und die Zehnerpotenzen durch Kopfrechnung zusammenfaßt.

Beispiele von oben:

1. $36\,400 \cdot 128\,000 = 3{,}64 \cdot 10^4 \cdot 1{,}28 \cdot 10^5$

$= \underbrace{3{,}64 \cdot 1{,}28}_{\text{Berechnung mit Stab}} \cdot \underbrace{10^4 \cdot 10^5}_{10^9}$ (diese Umstellung der Faktoren muß nicht schriftlich gemacht werden)

$= 4{,}66 \cdot 10^9$

Bei der Multiplikation der Zehnerpotenzen werden die Hochzahlen – unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens! – addiert.

2. $0{,}034 \cdot 86\,120 = 3{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 8{,}612 \cdot 10^4$

$= 3{,}4 \cdot 8{,}612 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4$

$= 29{,}3 \cdot 10^2 = 2{,}93 \cdot 10^3$

3. $0{,}0087 \cdot 0{,}000\,321 = 8{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}21 \cdot 10^{-4}$

$= 8{,}7 \cdot 3{,}21 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4}$

$= 27{,}9 \cdot 10^{-7} = 2{,}79 \cdot 10^{-6}$

Dieses Verfahren bietet den schon erwähnten Vorteil, daß es nur Stellen liefert, die tatsächlich gesichert sind. Um korrekt zu sein, müßte man u. U. die nach dem 1. Verfahren gewonnenen Ergebnisse entsprechend umschreiben, also anstatt (3. Beispiel, 1. Verfahren)

30 500 besser $30{,}5 \cdot 10^3$ oder $3{,}05 \cdot 10^4$ schreiben.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung des Arbeitsblattes Nr. 4!

Arbeitsblatt Nr. 4

Es steht Ihnen frei, die Größenordnung des Produkts jeweils durch Abschätzung oder mit Hilfe von Zehnerpotenzen zu ermitteln. Korrekterweise sollten Sie das Ergebnis jedoch stets so angeben, daß nur gesicherte Stellen erscheinen.

1. 0,0635 · 0,009 68 = ...	16. 3 760 000 · 0,005 99 = ...
2. 0,0224 · 576 = ...	17. 674 000 · 14,38 = ...
3. 16 950 · 81,3 = ...	18. 0,0706 · 0,873 = ...
4. 726 · 318 400 = ...	19. 103,5 · 492 = ...
5. 10 050 · 0,006 57 = ...	20. 0,000 0592 · 0,003 16 = ...
6. 83,2 · 0,0954 = ...	21. 1860 · 916 = ...
7. 0,801 0,739 = ...	22. 70 050 · 3715 = ...
8. 136,4 · 581 = ...	23. 2 310 000 · 0,008 93 = ...
9. 356 · 709 = ...	24. 62 850 · 4060 = ...
10. 1105 · 23,01 = ...	25. 0,0794 · 0,001 22 = ...
11. 80,8 · 0,000 1905 = ...	26. 0,2995 · 0,030 05 = ...
12. 0,003 79 · 0,000 207 = ...	27. 154,5 · 4049 = ...
13. 1094 · 0,00574 = ...	28. 702 · 0,000 534 = ...
14. 0,000 083 · 9056 = ...	29. 10 040 · 3905 = ...
15. 472,5 · 804 = ...	30. 0,000 574 · 0,000 606 = ...

Ergebnisse: 1. 0,000 615; 2. 12,90; 3. $1{,}378 \cdot 10^6$; 4. $2{,}31 \cdot 10^8$; 5. 66,03; 6. 7,94; 7. 0,592; 8. $7{,}925 \cdot 10^4$; 9. $2{,}525 \cdot 10^5$; 10. $2{,}545 \cdot 10^4$; 11. 0,015 39; 12. $7{,}84 \cdot 10^{-7}$; 13. 6,28; 14. 0,7515; 15. $3{,}8 \cdot 10^5$; 16. $2{,}25 \cdot 10^4$; 17. $9{,}7 \cdot 10^6$; 18. 0,0616; 19. $5{,}09 \cdot 10^4$; 20. $1{,}871 \cdot 10^{-7}$; 21. $1{,}740 \cdot 10^6$; 22. $2{,}602 \cdot 10^8$; 23. $2{,}063 \cdot 10^4$; 24. $2{,}552 \cdot 10^8$; 25. $9{,}69 \cdot 10^{-5}$; 26. 0,009 00; 27. $6{,}26 \cdot 10^5$; 28. 0,375; 29. $3{,}92 \cdot 10^7$; 30. $3{,}48 \cdot 10^{-7}$.

2.4 Tabellierung der Funktion $y = a\ x$
Produkte mit einem konstanten Faktor

$\boxed{y = a \cdot x}$

Häufig ergibt sich die Aufgabe, dieselbe Zahl a nacheinander mit verschiedenen Faktoren zu multiplizieren. Dann ist es zweckmäßig, den konstanten Faktor a als ersten Faktor auf Skala D einzustellen (D a I C 1 oder D a I C 10), weil dann alle Produkte ohne Umsetzen der Zunge lediglich durch Verschieben des Läufers berechnet werden können (Vorteil der versetzten Skalen CF/DF).
Dieses Verfahren ist vorteilhaft bei

Umrechnungen zwischen verschiedenen Maßeinheiten,
Valutarechnungen,
Prozentrechnungen mit konstantem Prozentsatz
Rechnungen mit dem Horner-Schema usw.

Beispiel: 1 Zoll = 2,54 cm; x Zoll = 2,54 x cm

Wieviel cm sind	1,8	32,7	8,9	0,15	4,8	Zoll?
Ergebnisse:	4,57	83,1	22,6	0,381	12,2	cm

Einstellung: D 2,54 C 1. Dann stehen auf den Skalen C und D sowie CF und DF einander entsprechende Werte in Zoll bzw. cm gegenüber.

2.5 Multiplikation und Division mit π

$\pi \cdot x$

C | CF

D | DF

Die Multiplikation mit π ist ohne Zungenverschiebung mit dem Läuferstrich allein möglich, weil die Skalen CF und DF gegenüber den Skalen C bzw. D um die Strecke π versetzt sind. Stellt man also den Läuferstrich über eine Zahl x auf der Skala C oder D, so kann man auf CF bzw. DF unter dem Läuferstrich das Produkt $\pi \cdot x$ ablesen.

Diese Eigenschaft des Skalenpaares CF/DF wird durch die Bezeichnung πx am rechten Skalenrand ausgedrückt. Die Ablesung auf der richtigen Skala wird durch die grüne Unterlegung der Zungenskalen erleichtert.
Man merke sich: Einstellung auf weiß — Ablesung auf weiß
Einstellung auf grün — Ablesung auf grün.
Umgekehrt ergibt der senkrechte Übergang von Skala CF oder DF auf Skala C bzw. D die Division des eingestellten Wertes durch π.

$\frac{x}{\pi}$

CF | C

DF | D

2.6 Multiplikation und Division mit 3,6, 360 und 3600

3,6 · x

360 · x

3600 · x

Auf der Vorderseite des Läufers (beim Castell-Duplex auf der Rückseite) befindet sich rechts vom Hauptstrich in Höhe der Skalen CF und DF eine Strichmarke mit der Bezeichnung 360. Zusammen mit der Versetzung der oberen Skalen ergibt der Abstand der Marke vom Hauptstrich eine Verschiebung um die Strecke 3,6.
(Kontrolle: Setzt man den Läuferstrich über C 1, dann muß die Marke „360" über CF 36 stehen). Dieser Verschiebung entspricht aber eine Multiplikation mit dem Faktor 3,6 (oder 360 oder 3600).

Stellt man also den Läuferstrich auf eine Zahl x der Skala C oder D, so kann man unter der Marke 360 auf CF bzw. DF (wiederum: weiß - weiß oder grün - grün!) den Wert 3,6 · x oder 360 · x oder 3600 · x ablesen.

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{x}{3{,}6} \\ \dfrac{x}{360} \\ \dfrac{x}{3600} \end{array}}$$

Umgekehrt ergibt der Übergang von der Marke 360 auf den Mittelstrich über den unteren Skalen eine Division durch 3,6, 360 oder 3600.

Anwendungen: 1. Umrechnung von Geschwindigkeiten von km/h in m/s und umgekehrt.

Es gilt: 1 m/s = 3,6 km/h und 1 km/h = $\frac{1}{3{,}6}$ m/s.

Beispiele: 1. 5 m/s = 18 km/h
2. 72 km/h = 20 m/s

Einstellung: 1. Mittelstrich auf C 5 oder D 5
Unter Marke 360 auf CF bzw. DF: 18
2. Marke 360 auf CF 72 oder DF 72
Unter Mittelstrich auf C bzw. D: 20

2. Für Zinsrechnungen gilt: 1 Jahr = 360 Tage. Mit Hilfe der Marke 360 können Jahre in Tage umgerechnet werden und umgekehrt.

Beispiele: 1. $1^3/_4$ Jahre = 1,75 Jahre = 630 Tage
2. 124 Tage = 0,344 Jahre.

3. Da 1 Stunde = 3600 Sekunden ist, dient dieselbe Marke zur Umrechnung von Stunden in Sekunden und umgekehrt. Entsprechendes gilt für Winkelgrade und Winkelsekunden (1^0 = 3600″).

Beispiele: 1. 1,35 h = 4860 s
2. 266″ = $0{,}0628^0$

4. Umrechnung von Kilowattstunden in Wattsekunden und umgekehrt (1 kWh = $3{,}6 \cdot 10^6$ Ws).

2.7 Multiplikation mit der Skala DF als Basis

Wegen der Gleichartigkeit der Skalenpaare C/D und CF/DF (abgesehen von der Versetzung um π) kann man zur Berechnung eines Produkts a · b den ersten Faktor a auch auf der Skala DF einstellen und die Marke -1- auf der Mitte der Skala CF darunterstellen.

Das Produkt a · b findet man dann auf DF über CF b oder auf D unter C b.

Einstellung des 1. Faktors mit CF 1

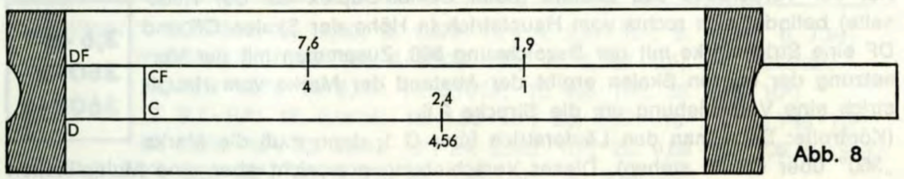


Abb. 8

1,9 · 2,4 = 4,56; 1,9 · 4 = 7,6

Es handelt sich also prinzipiell um den gleichen Vorgang, wie er oben für die Skalen C/D beschrieben wurde.

Das Verfahren ist nützlich,

1. wenn nach Multiplikation einer Zahl a mit π (durch den Übergang von D nach DF) das Ergebnis noch mit einem weiteren Faktor multipliziert werden soll.

Beispiel: Tabelle der Funktion 4,05 π x
Man stellt CF 1 über D 4,05 (kurz: D 4,05 | CF 1).
Über CF x findet man auf DF den gesuchten Wert (kurz: CF x | DF: 4,05 π x).

x	3,6	6,45	12,4	0,225	53,9
4,05 π x	45,8	82,1	157,8	2,86	686

2. wenn bei der Berechnung eines Produkts mit drei Faktoren (a · b · c) das Zwischenergebnis a · b nur auf der Skala DF abgelesen werden kann.

Beispiel: 6,65 · 1,23 · 1,08

Einstellung: D 6,65 I C 10
CF 1,23 I DF: 8,18
Läufer auf DF 8,18
DF 8,18 I CF 1
CF 1,08 I DF: 8,83

Die hier verwendete einfache Symbolik soll nochmals erläutert werden:

1. Zeile: Über D 6,65 wird C 10 gestellt.
2. Zeile: Senkrecht über CF 1,23 findet man auf DF den Wert 8,18.
3. Zeile: Das Zwischenergebnis 8,18 wird mit dem Läuferstrich festgehalten (es braucht nicht abgelesen zu werden).
4. Zeile: Senkrecht unter DF 8,18 wird CF 1 gestellt.
5. Zeile: Über CF 1,08 findet man auf DF den Wert 8,83.

Das nun folgende Arbeitsblatt Nr. 5 umfaßt den Stoff der Kapitel 2.4, 2.5, 2.6 und 2.7. Wenn Sie mit einer Aufgabe Schwierigkeiten haben sollten, dann lesen Sie das entsprechende Kapitel nochmals durch.

Arbeitsblatt Nr. 5a

1. Das spezifische Gewicht von Eisen ist 7,86 p/cm³.

Was wiegen	3,8 dm³	0,107 m³	62,5 cm³	21,3 mm³	Eisen?
Ergebnis					

2. Die Dichte von Sauerstoff bei Normalbedingungen ist 1,429 g/dm³.

Welche Masse haben	27,1 cm³	8,15 dm³	18,6 m³	693 mm³	Sauerstoff?
Ergebnis					

3. Welchen Umfang hat ein Kreis vom

Durchmesser	7,35 cm	4,96 mm	1,67 dm	0,945 m
Ergebnis				

4. Welchen Durchmesser hat eine Walze mit dem

Umfang	3,09 m	80,5 mm	67,3 cm	9,87 cm
Ergebnis				

5. Berechnen Sie den Ausdruck $\frac{a}{\pi} \cdot b$ für folgende Werte a, b

a	8,4	17,9	37,3	106	0,202	43,5
b	1,08	7,25	0,505	0,845	123	0,85
$\frac{a}{\pi} \cdot b$						

6. 6.1 Welchen Weg legt ein Wagen bei der Geschwindigkeit 137 km/h in einer Sekunde zurück? Ergebnis: ....

6.2 Ein Weltraumschiff hat die Geschwindigkeit 38 600 km/h. Wie groß ist seine Geschwindigkeit in m/s? Ergebnis: ....

6.3 Ein Satellit umfliegt die Erde mit einer Geschwindigkeit 8,3 km/s. Wie groß ist seine Geschwindigkeit in km/h? Ergebnis: ....

Arbeitsblatt Nr. 5b

7. Berechnen Sie das Produkt $\pi \cdot a \cdot b$ für folgende Werte a, b

a	4,15	77,5	0,148	0,148	1,48	14,8
b	6,64	0,392	2,56	68,5	4,95	0,545
$\pi \cdot a \cdot b$						

8. Berechnen Sie das Produkt $a \cdot b \cdot c$ für folgende Werte a, b, c

a	5,35	2,43	6,82	0,47	1,98	6,05
b	13,8	6,95	1,26	8,3	7,25	0,118
c	0,92	1,24	1,67	5,95	2,64	3,76
$a \cdot b \cdot c$						

9. Ergänzen Sie:

x	1,3		73,5		4,84	
$0{,}765\,\pi x$		5,14		0,202		40,4

Ergebnisse:
1. 29,85 kp; 841 kp; 491 p; 0,1674 p
2. 38,75 mg; 11,65 g; 26,6 kg; 0,99 mg
3. 23,1 cm; 15,58 mm; 5,25 dm; 2,97 m
4. 0,984 m; 25,6 mm; 21,4 cm; 3,14 cm
5. 2,885; 41,3; 6,00; 28,5; 7,91; 11,77
6. 38,05 m; 10 720 $\frac{m}{s}$; 29 900 $\frac{km}{h}$
7. 86,6; 95,4; 1,190; 31,85; 23,0; 25,35
8. 67,9; 20,95; 14,35; 23,2; 37,9; 2,68

9.

x		2,14		0,84		16,8
$0{,}765\,\pi x$	3,12		176,6		11,6	

3. Division

$\boxed{\frac{a}{b}}$

3.1 Rechenvorgang

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation:

$$1{,}8 \cdot 3 = 5{,}4; \text{ umgekehrt: } 5{,}4 : 3 = 1{,}8$$

Dementsprechend verläuft auch die Division a : b umgekehrt wie eine Multiplikation:

1. Der Läuferstrich wird über den Dividenden a auf Skala D gestellt (Läufer über D a).
2. Der Divisor b auf Skala C wird unter den Läuferstrich gestellt (D a I C b).
3. Der Quotient a : b wird auf Skala D unter C 1 oder C 10 abgelesen (C 1 I D: $\frac{a}{b}$ oder C 10 I D: $\frac{a}{b}$). Es empfiehlt sich, auch hierbei zum genauen Ablesen den Läuferstrich zu benutzen, übrigens gilt auch hier die „Farbregel": weiß - grün - weiß.

Beispiele:

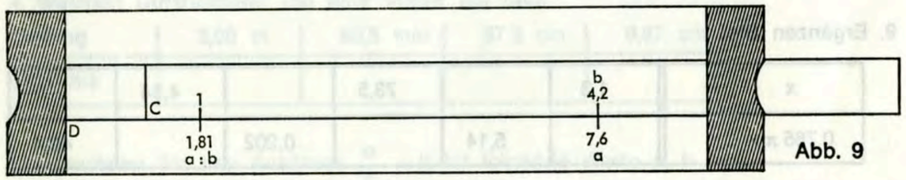


Abb. 9

$$7{,}6 : 4{,}2 = 1{,}81$$

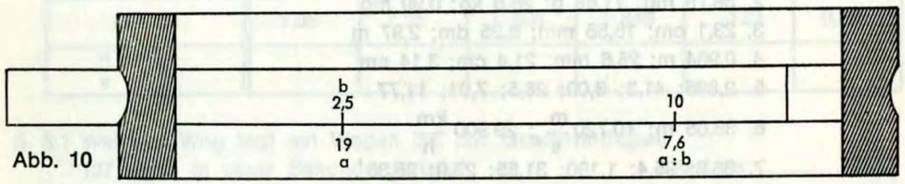


Abb. 10

$$19 : 2{,}5 = 7{,}6$$

Rechnen Sie zur Übung auch die folgenden Beispiele nach:

8,4 : 3,36 = 2,50; 18,4 : 6,45 = 2,855; 104 : 5,4 = 19,26; 4,65 : 2,17 = 2,14; 690 : 3,24 = 213; 94,5 : 77 = 1,227.

3.2 Bestimmung der Kommastellung bei der Division

1. In einfacheren Fällen kann die Größenordnung des Quotienten durch Überschlagsrechnung nach großzügiger Rundung von Dividend und Divisor bestimmt werden.

Dabei ist es häufig nützlich, sich daran zu erinnern, daß durch einen Bruch dividiert wird, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert:

a : 0,5 = 2 a; a : 0,33 = 3 a; a : 0,25 = 4 a; a : 0,2 = 5 a;
a : 0,167 = 6 a; a : 0,1 = 10 a; a : 0,05 = 20 a; usw.

2. Oft ist es günstig, vor der Überschlagungsrechnung den Bruch mit einer geeigneten Zehnerpotenz zu kürzen oder zu erweitern (also das Komma bei Dividend und Divisor um eine gleiche Anzahl von Stellen nach links oder rechts zu rücken), so daß der Divisor eine Zahl zwischen 1 und 10 wird.

Beispiele: $428 : 0{,}059 = 42\,800 : 5{,}9 \approx 7000$
$0{,}813 : 240 = 0{,}00813 : 2{,}4 \approx 0{,}004$
$0{,}0308 : 0{,}76 = 0{,}308 : 7{,}6 \approx 0{,}04$

3. Ist der Dividend kleiner als der Divisor, so beginnt man am besten mit der Bestimmung der Kommastellung wie bei der schriftlichen Division.

Beispiel: 0,146 : 26,4 = 0 , 0 0 553

0 durch 26 gibt 0
beim Überschreiten des Kommas wird im Quotienten das Komma gesetzt
1 herunter: 1 durch 26 gibt 0
4 herunter: 14 durch 26 gibt 0
6 herunter: 146 durch 26 gibt: die nun folgende Ziffernfolge wird mit dem Stab berechnet.

4. In unübersichtlichen Fällen und bei komplizierten Rechnungen (zusammengesetzte Multiplikationen und Divisionen) hilft wieder die Zerlegung der beteiligten Zahlen in je einen Faktor zwischen 1 und 10 und eine Zehnerpotenz.

Beispiele:

1. $$\frac{0{,}0036}{418} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{-3}}{4{,}18 \cdot 10^{2}} = 0{,}861 \cdot 10^{-5}$$

2. $$\frac{56\,200}{0{,}079} = \frac{5{,}62 \cdot 10^{4}}{7{,}9 \cdot 10^{-2}} = 0{,}711 \cdot 10^{6}$$

3. $$\frac{329}{60\,400} = \frac{3{,}29 \cdot 10^{2}}{6{,}04 \cdot 10^{4}} = 0{,}545 \cdot 10^{-2}$$

Dabei werden die Zehnerpotenzen dividiert, indem man die Hochzahl des Nenners (unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens!) von der Hochzahl des Zählers subtrahiert.

Bei der Bearbeitung des nun folgenden Arbeitsblattes Nr. 6 ist es Ihnen wiederum freigestellt, auf welche Weise Sie die Größenordnung des Quotienten bestimmen.

Arbeitsblatt Nr. 6 a

1. 630 : 13 = ...	16. 1086 : 874 = ...
2. 2,94 : 6,49 = ...	17. 80,4 : 0,003 47 = ...
3. 34,9 : 2,59 = ...	18. 0,198 : 0,267 = ...
4. 96,8 : 431 = ...	19. 1 : 56,3 = ...
5. 0,867 : 4,31 = ...	20. 1 : 257 = ...
6. 0,624 : 0,034 = ...	21. π : 5,34 = ...
7. 2430 : 1,73 = ...	22. π : 28,3 = ...
8. 9,86 : 97,52 = ...	23. 100 : 766 = ...
9. 8,51 : 1,015 = ...	24. 31,6 : 0,1795 = ...
10. 18,4 : 72 400 = ...	25. 620 : 89 = ...
11. 32 000 : 2,34 = ...	26. 0,001 : 7,05 = ...
12. 1 : 13,4 = ...	27. 0,0585 : 0,0647 = ...
13. 4,18 : 6,81 = ...	28. 0,004 94 : 23,2 = ...
14. 0,0296 : 0,283 = ...	29. 76,2 : 0,038 = ...
15. 0,0069 : 0,000 782 = ...	30. 10 π : 6,35 = ...

Ergebnisse: 1. 48,5; 2. 0,453; 3. 13,47; 4. 0,2245; 5. 0,201; 6. 18,35; 7. 1405; 8. 0,1011; 9. 8,38; 10. $2,54 \cdot 10^{-4}$; 11. $1,367 \cdot 10^{4}$; 12. 0,0746; 13. 0,614; 14. 0,1046; 15. 8,825; 16. 1,243; 17. $2,315 \cdot 10^{4}$; 18. 0,742; 19. 0,017 76; 20. $3,89 \cdot 10^{-3}$; 21. 0,588; 22. 0,111; 23. 0,1305; 24. 176,0; 25. 6,97; 26. $1,418 \cdot 10^{-4}$; 27. 0,904; 28. $2,13 \cdot 10^{-4}$; 29. 2005; 30. 4,95.

Arbeitsblatt Nr. 6 b

1. 14,65 : 297,5 = ...	16. 0,005 98 : 0,000 472 = ...
2. 156 : 25 = ...	17. 0,582 : 4780 = ...
3. 0,4729 : 0,467 = ...	18. 3920 : 0,0881 = ...
4. 38,4 : 1,38 = ...	19. 10,05 : 0,006 74 = ...
5. 0,0463 : 0,002 79 = ...	20. 0,0714 : 0,006 45 = ...
6. 64,8 : 0,0035 = ...	21. π : 0,000 784 = ...
7. 79,44 : 0,067 = ...	22. 83 500 : 2 420 000 = ...
8. 386,5 : 14,28 = ...	23. 0,0603 : 496 = ...
9. 0,0473 : 26,42 = ...	24. 0,002 08 : 0,000 718 = ...
10. 29,37 : 0,0564 = ...	25. 100 π : 86 400 = ...
11. 29,43 : 37,64 = ...	26. 11 400 : 0,053 = ...
12. 0,0796 : 0,0452 = ...	27. 0,009 02 : 0,0394 = ...
13. 68 400 : 3,92 = ...	28. 1 : $(16,4 \cdot 10^{-6})$ = ...
14. 23,8 : 14,7 = ...	29. 1 : $(5,05 \cdot 10^{3})$ = ...
15. 596 : 0,1125 = ...	30. 10^{4} : $(7,8 \cdot 10^{6})$ = ...

Ergebnisse: 1. 0,0492; 2. 6,24; 3. 1,013; 4. 27,85; 5. 16,59; 6. $1,851 \cdot 10^{4}$; 7. 1186; 8. 27,05; 9. $1,79 \cdot 10^{-3}$; 10. 521; 11. 0,782; 12. 1,761; 13. $1,745 \cdot 10^{4}$; 14. 1,619; 15. $5,3 \cdot 10^{3}$; 16. 12,67; 17. $1,218 \cdot 10^{-4}$; 18. $4,45 \cdot 10^{4}$; 19. 1491; 20. 11,07; 21. $4,01 \cdot 10^{3}$; 22. 0,0345; 23. $1,216 \cdot 10^{-4}$; 24. 2,895; 25. $3,635 \cdot 10^{-3}$; 26. $2,15 \cdot 10^{5}$; 27. 0,229; 28. $6,1 \cdot 10^{4}$; 29. $1,98 \cdot 10^{-4}$; 30. $1,282 \cdot 10^{-3}$.

3.3 Verwendung des Skalenpaares CF/DF bei der Division

1. Das Ergebnis einer Division, die mit den Skalen C und D wie beschrieben begonnen wurde, kann auch über CF 1 auf der Skala DF abgelesen werden, wenn nicht die Marke CF 1 über die Skala DF hinausragt.

Beispiel: 3,7 : 6,8 = 0,544; dieses Ergebnis kann sowohl unter C 10 als auch über CF 1 abgelesen werden.

2. Die gesamte Divison kann auch mit dem Skalenpaar CF/DF durchgeführt werden:

Läufer über Dividend a auf Skala DF
Divisor b auf Skala CF unter den Läufer stellen
Quotient a : b über CF 1 auf DF (oder unter C 1 bzw. C 10 auf D) ablesen.

Dieses Verfahren erspart oft längere Verschiebungen der Zunge und hat zudem den Vorteil, daß Dividend und Divisor in der gleichen Anordnung übereinander stehen wie bei einem Bruch (Dividend oben, Divisor unten); die Gleitfuge zwischen den Skalen CF und DF vertritt dabei gleichsam den Bruchstrich.

Diese Tatsache ist besonders bei den Proportionen (siehe 3.5) nützlich.

Wer dieses Verfahren einüben möchte, kann dazu die Aufgaben der Arbeitsblätter 6 a und 6 b benutzen.

3.4 Ein zweites Divisionsverfahren — Division mit konstantem Divisor

$\boxed{y = \frac{x}{b}}$

Sollen verschiedene Zahlen durch denselben Divisor b geteilt werden (z. B. bei der Tabellierung der Funktion y = x/b), dann benützt man am besten ein anderes Divisionsverfahren, das auch für verknüpfte Rechenoperationen im Zusammenhang mit anderen Skalen (z. B. der Sinus-Skala) nützlich ist. Auch dieses Verfahren beruht auf der Umkehrung der Multiplikation und geht davon aus, daß

$$b \cdot \frac{a}{b} = a \text{ ist.}$$

Einstellung: C 1 oder C 10 über D b

Über D a steht dann auf C der Quotient $\frac{a}{b}$.

Selbstverständlich ist auch hier der Übergang auf das Skalenpaar CF/DF möglich.

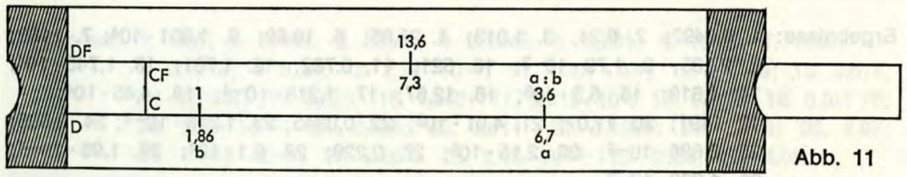


Abb. 11

6,7 : 1,86 = 3,6; 13,6 : 1,86 = 7,3

Auch dieses Verfahren kann mit den Aufgaben der Arbeitsblätter 6 a und 6 b eingeübt werden.

3.5 Proportionen (Verhältnisgleichungen) — Tabellenbildung

Bei der Berechnung eines Quotienten,

$$\text{z. B. } 9 : 12 = \frac{9}{12} = 0{,}75$$

mit dem Skalenpaar CF/DF fällt auf, daß bei der Einstellung DF 9 I CF 12 der Quotient aller Zahlen, die einander auf CF und DF gegenüberstehen, denselben Wert 0,75 hat, so z. B. 3 : 4; 4,5 : 6; 15 : 20; usw.

Dasselbe gilt auch für die Zahlen, die einander auf den Skalen C und D gegenüberstehen, nur ist jetzt deren Anordnung umgekehrt: der Dividend steht unten (auf D) der Divisor oben (auf C).

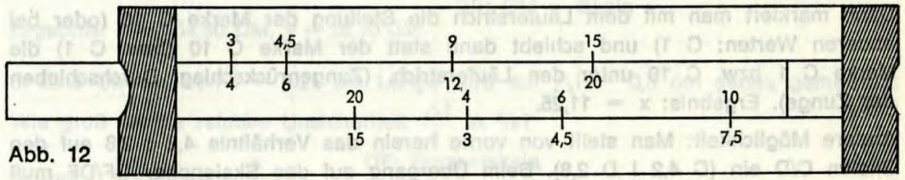


Abb. 12

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \frac{4{,}5}{6} = \frac{15}{20} = \frac{7{,}5}{10}$$

Sind also $a_1, a_2, a_3, \ldots$ irgendwelche Zahlen auf DF oder D und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ die darunter- bzw. darüberstehenden Zahlen auf CF bzw. C, so ist

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots$$

Diese Tatsache erlaubt die bequeme Lösung von Verhältnisgleichungen (Proportionen), das sind Gleichungen von der Art

$$(1)\ \frac{x}{a} = \frac{b}{c} \quad \text{und} \quad (2)\ \frac{a}{x} = \frac{b}{c}.$$

Einstellung: DF b I CF c

Die Zahlen b und c stehen dann wie auf der rechten Seite der Gleichungen übereinander, die Gleitfuge entspricht dem Bruchstrich.

Gleichung (1): CF a | DF: x (Abb. 13)
Gleichung (2): DF a | CF: x (Abb. 14)

in beiden Fällen stehen sich x und a wie in dem entsprechenden Bruch gegenüber.

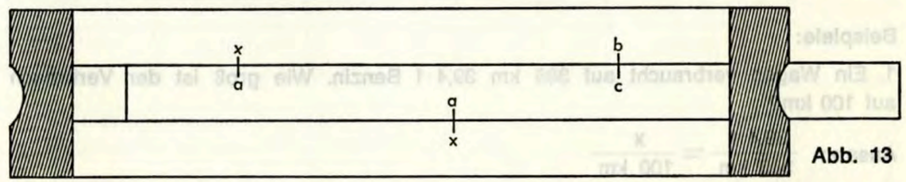


Abb. 13

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$$

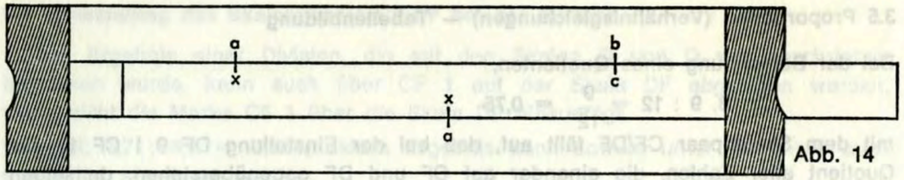


Abb. 14

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$$

Gelegentlich wird dabei der Ablesebereich zu klein.

Beispiel: $\frac{x}{7{,}5} = \frac{4{,}2}{2{,}8}$

Dann markiert man mit dem Läuferstrich die Stellung der Marke C 10 (oder bei anderen Werten: C 1) und schiebt dann statt der Marke C 10 (bzw. C 1) die Marke C 1 bzw. C 10 unter den Läuferstrich. (Zungenrückschlag, Durchschieben der Zunge). Ergebnis: x = 11,25.

Andere Möglichkeit: Man stellt von vorne herein das Verhältnis 4,2 : 2,8 auf den Skalen C/D ein (C 4,2 I D 2,8). Beim Übergang auf das Skalenpaar CF/DF muß man jedoch daran denken, daß oben und unten vertauscht wird. Verläßlich ist jedoch auch hier die Farbenregel: (weiß) zu (grün) wie (weiß) zu (grün).

Beispiel: $\frac{24}{3{,}8} = \frac{x}{5{,}2} = \frac{6{,}95}{y} = \frac{z}{8{,}7}$

entweder Einstellung DF 24 | CF 3,8
CF 5,2 | DF: x = 32,8
D 6,95 | C: y = 1,1
und nach Durchschieben
CF 8,7 | DF: z = 54,9
oder
C 8,7 | D: z = 54,9

oder Einstellung D 24 | C 3,8
C 5,2 | D: x = 32,8
DF 6,95 | CF: y = 1,1
C 8,7 | D: z = 54,9

Mit Hilfe von Proportionen lassen sich Dreisatzrechnungen mit direktem Verhältnis sowie Prozentrechnungen einfach ausführen, wobei die drei verschiedenen Aufgabentypen der Prozentrechnung (Berechnung des Prozentsatzes, des Prozentwertes und des Grundwertes) nach dem gleichen Schema behandelt werden.

Beispiele:

1. Ein Wagen verbraucht auf 386 km 39,4 l Benzin. Wie groß ist der Verbrauch auf 100 km?

Ansatz: $\frac{39{,}4\ \text{l}}{386\ \text{km}} = \frac{x}{100\ \text{km}}$

Einstellung: DF 39,4 I CF 386
CF 100 I DF: 10,2

Mit derselben Einstellung ergeben sich aber auch beliebig viele andere Wertepaare, so zum Beispiel der Verbrauch auf 260 km (26,55 l) oder die Strecke, die man mit 5 l fahren kann (49 km). Man muß sich nur merken, daß in diesem Fall die obere Skala (DF) die Liter-Skala, die untere Skala (CF) die km-Skala darstellt.

2. Eine Ware kostet einschließlich 11% Umsatzsteuer 283 DM. Was kostet die Ware allein und wie hoch ist die Umsatzsteuer?

Ansatz: $\frac{111\ \%}{283\ \text{DM}} = \frac{100\ \%}{x} = \frac{11\ \%}{y}$

Dabei ist x der Preis der Ware ohne Umsatzsteuer und y die Umsatzsteuer.

Einstellung: DF 111 I CF 283 — DF: Prozentskala, CF: DM – Skala

Ergebnis: x = 254,90 DM, y = 28,10 DM

3. Eine Strecke von l = 421 cm Länge wird auf $\triangle$l = 0,3 cm genau gemessen. Wie groß ist die relative Unsicherheit $\frac{\triangle l}{l}$ in %?

Ansatz: $\frac{100\ \%}{421\ \text{cm}} = \frac{x}{0{,}3\ \text{cm}}$ — DF: Prozentskala, CF: cm – Skala

Ergebnis: x = 0,0713%

Übungen hierzu finden Sie auf dem Arbeitsblatt Nr. 7

Arbeitsblatt Nr. 7

1. Eine Feder dehnt sich bei Belastung mit 43,5 p um 8,73 cm.
Füllen Sie folgende Tabelle aus:

Belastung	26,7 p		7,92 p		136 p
Dehnung		21,4 cm		4,7 mm	

2. Ergänzen Sie:

Grundwert (100 %)	64,7 m	24,8 kg		7,35 DM	
Prozentsatz	86,4 %		8 %		0,3 %
Prozentwert		37,3 kg	19,4	42,50 DM	6,9 kg

3. Berechnen Sie die Unbekannten:

$$\frac{13{,}7}{96{,}5}=\frac{x}{42{,}8}=\frac{225}{y}=\frac{0{,}68}{z}=\frac{7{,}15}{u}$$

x = ... y = ... z = ... u = ...

$$\frac{44{,}5}{27{,}3}=\frac{a}{16{,}4}=\frac{8{,}92}{b}=\frac{1320}{c}=\frac{d}{0{,}074}$$

a = ... b = ... c = ... d = ...

Ergebnisse:

1.

	106,6 p		2,34 p	
5,36 cm		1,59 cm		27,3 cm

2.

		242,5 l		2300 kg
	150,4%			
55,9 m			578%	

3. x = 6,075 y = 1585 z = 4,79 u = 50,35

4. a = 26,75 b = 5,47 c = 810 d = 0,1206

4. Die Reziprokskalen CI, DI und CIF

4.1 Allgemeines

Der Buchstabe I (für invers) in der Bezeichnung dieser Skalen weist darauf hin, daß es sich um Reziprokskalen (Kehrwertskalen) handelt, die Buchstaben C bzw. D bzw. CF geben an, auf welche der Hauptskalen die betreffende Kehrwertskala bezogen ist. Stellt man also auf einer der drei Skalen C, D oder CF mit dem Läuferstrich eine Ziffernfolge x ein, so findet man auf der zugeordneten Skala CI bzw. DI bzw. CIF unter dem Läuferstrich die Ziffernfolge $\frac{1}{x}$ des Kehrwerts u n d u m g e k e h r t.

Demnach kann der Reziprokwert einer Zahl auf 6 verschiedene Arten bestimmt werden:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Einstellung auf	C	CI	D	DI	CF	CIF
Ablesung auf	CI	C	DI	D	CIF	CF

Die rote Färbung der Reziprokskalen soll immer wieder darauf aufmerksam machen, daß die Skalen rückläufig sind, was übrigens auch für alle anderen rot gefärbten Skalen gilt. Die Größenordnung des Reziprokwerts muß wieder durch Abschätzung oder mit Hilfe von Zehnerpotenzen gefunden werden.

Das Skalenpaar C/CI findet man übrigens ein zweites Mal auf der Rückseite der Zunge (beim Castell-Duplex auf der Vorderseite).

Beispiele und Übungen (man benutze für die einzelnen Aufgaben verschiedene Einstellungen):

x	1,69	3,83	7,14	23,5	0,67	458	0,008	5800	0,094
1/x	0,592				1,492				

Ergebnisse: 0,261; 0,14; 0,0426; 0,00218; 125; $1{,}724 \cdot 10^{-3}$; 10,64.

4.2 Division mit den Kehrwertskalen

Anstatt durch eine Zahl zu dividieren, kann man mit ihrem Kehrwert multiplizieren: $a : b = a\,\frac{1}{b}$.

Dieses Verfahren ist besonders dann vorteilhaft, wenn dieselbe Zahl a nacheinander durch verschiedene Zahlen dividiert werden muß, also z. B. beim Tabellieren einer Funktion $y = \frac{a}{x}$.

$$\boxed{y=\frac{a}{x}}$$

Auch bei mehrfachen Divisionen (siehe 5. Abschnitt) ist diese Methode günstig.

Beispiel: 16,4 : 2,8; 16,4 : 2,22.

Einstellung: Läuferstrich über Dividend 16,4 auf Skala D.
Marke 1 (oder 10) der Skala CI unter den Läuferstrich stellen. Gegenüber dem Wert 2,8 bzw. 2,22 auf Skala CI bzw. CIF kann der Quotient auf D bzw. DF abgelesen werden.

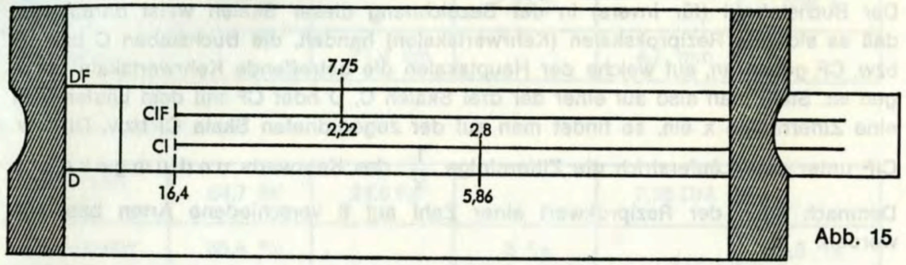


Abb. 15

16,4 : 2,8 = 5,86; 16,4 : 2,22 = ~~7,75~~ 7,88

Es wird empfohlen, zur Übung wenigstens einen Teil der Aufgaben der Arbeitsblätter 6 a und 6 b nochmals nach diesem Verfahren zu lösen.

4.3 Multiplikation mit den Kehrwertskalen

Anstatt mit einer Zahl zu multiplizieren, kann man auch durch ihren Kehrwert dividieren: $a \cdot b = a : \frac{1}{b}$.

Beispiel: $2{,}5 \cdot 3{,}2$

Einstellung: Läuferstrich über 2,5 auf D.
3,2 auf CI unter den Läuferstrich stellen.
Gegenüber C 10 steht auf D das Produkt 8.

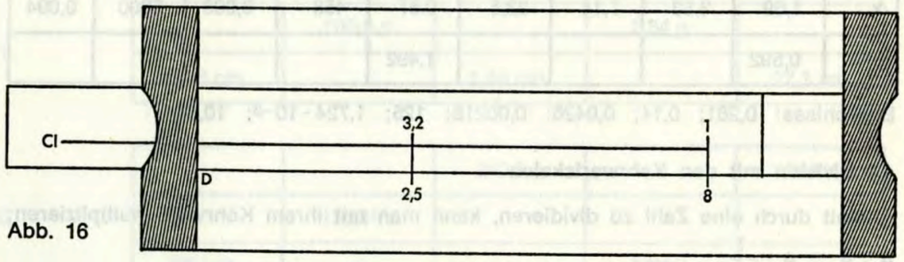


Abb. 16

2,5 : 3,2 = 8

Dieses Verfahren wird besonders bei Produkten mit mehr als zwei Faktoren benützt (siehe 5. Abschnitt).

Zur Einübung sollten Sie wenigstens einen Teil der Aufgaben von Arbeitsblatt Nr. 3 und 4 mit diesem Verfahren lösen.

4.4 Dreisatzaufgaben mit umgekehrten (indirekten) Verhältnissen

Beispiel: Eine bestimmte Gasmenge hat beim Druck p_1 das Volumen V_1.
Wie groß ist bei unveränderter Temperatur der Druck des Gases beim Volumen V_2?

Es gilt hier das Boyle-Mariottesche Gesetz:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \text{ oder } \frac{V_1}{1/p_1} = \frac{V_2}{1/p_2}$$

Druck und Volumen sind also umgekehrt proportional.

Die Lösung einer solchen indirekten Proportion ist mit den Reziprokskalen ganz einfach.

Beispiel: Eine Gasmenge hat bei 3,4 at das Volumen 26 l.
Wie groß ist ihr Druck beim Volumen 17,8 l?

Formel: $\left.\frac{26\ \text{l}}{1/3{,}4\ \text{at}} = \frac{17{,}8\ \text{l}}{1/p}\right\}$ DF: Volumenskala, CIF: Druckskala

Einstellung: DF 26 l CIF 3,4
DF 17,8 l CIF : 4,965

Ergebnis: p = 4,965 at

Natürlich können wieder beliebig viele weitere Wertepaare gewonnen werden.

Selbstverständlich können derartige Rechnungen auch mit den Skalen D und CI sowie DI und C ausgeführt werden; auch kann man – wie das im folgenden Beispiel u. U. nötig ist – während der Rechnung vom Skalenpaar DF/CIF auf das Skalenpaar D/CI übergehen und umgekehrt.

Beispiel: Beim Einsatz von drei gleichartigen LKW kann eine bestimmte Kiesmenge in 7,5 Stunden abgefahren werden.
Wie lang brauchen 2 bzw. 5 LKW dazu?

Ansatz: $3 \cdot 7{,}5 = 2 \cdot x = 5 \cdot y$ oder

$$\frac{3\ \text{LKW}}{1/7{,}5\ \text{h}} = \frac{2\ \text{LKW}}{1/x} = \frac{5\ \text{LKW}}{1/y}$$

Ergebnis: x = 11,25 h; y = 4,5 h

Beispiel: Bei parallelgeschalteten Widerständen verhalten sich die Stromstärken umgekehrt wie die Widerstände:

$$\frac{R_1}{1/i_1} = \frac{R_2}{1/i_2}$$

Zahlenbeispiel: Durch einen Widerstand von 36 Ohm fließen 0,86 Ampere.
Wie groß ist die Stromstärke in einem Parallelwiderstand von 23,4 Ohm?

Ansatz: $\frac{36\ \text{Ohm}}{1/0{,}86\ \text{A}} = \frac{23{,}4\ \text{Ohm}}{1/x}$

Ergebnis: x = 1,323 A (auf Skala CI über D 23,4 abgelesen)

Weitere wichtige Anwendungen der Skala DI ergeben sich bei trigonometrischen Aufgaben (siehe Abschnitt 9.5)

4.5 Berechnung von $\frac{1}{\pi \cdot x}$ und $\frac{\pi}{x}$

$\boxed{\frac{1}{\pi \cdot x}}$ $\boxed{C \mid CIF}$ $\boxed{CIF \mid C}$

1. Stellt man den Läuferstrich über eine Ziffernfolge x auf der Skala C, so steht auf Skala CIF unter dem Läuferstrich die Ziffernfolge von $\frac{1}{\pi x}$ (Auf diese Tatsache weist auch das Formelzeichen $\frac{10}{\pi x}$ am rechten Ende der Skala CIF hin.)
Dasselbe gilt auch für den Übergang in umgekehrter Richtung, nämlich von CIF auf C, was besonders dann wichtig ist, wenn man mit dem Wert $\frac{1}{\pi x}$ weitere Operationen ausführen muß.

Beispiel: $\frac{1}{\pi\, 7{,}15} \cdot 194$ Einstellung: D 194 I C 1
CIF 7,15 I D: 8,64

$\boxed{\frac{\pi}{x}}$ $\boxed{DF \mid DI}$

2. Wie schon bekannt, ergibt der Übergang von DF auf D (oder von CF auf C) die Division des eingestellten Wertes x durch π, also $\frac{x}{\pi}$.
Der anschließende Übergang auf die Kehrwertskala DI bzw. CI ergibt dann $\frac{\pi}{x}$.

Beispiel: $\frac{\pi}{1{,}83}$ Einstellung: DF 1,83 | DI: 1,717

Mit diesem Wert kann mit Hilfe der Skala CI auch weitermultipliziert werden.

Beispiel: $\frac{\pi}{1{,}83} \cdot 3{,}43$

Einstellung: DF 1,83 I DI: 1,717
DI 1,717 I C 10 (= CI 1)
CI 3,43 I DI: 5,89

5. Mehrfache und zusammengesetzte Multiplikationen und Divisionen

5.1 Produkte mit mehr als zwei Faktoren

$\boxed{a \cdot b \cdot c}$

Die Berechnung von Produkten mit drei oder mehr Faktoren durch einfache Wiederholung des Multiplikationsverfahrens erfordert nach jeder Multiplikation eine Verschiebung der Zunge, um die Marke 1 oder 10 über das Zwischenprodukt zu stellen und so die Ausgangsposition für die nächste Multiplikation zu erreichen. Mit Hilfe der Reziprokskala kommt man jedoch mit einer einzigen Zungenbewegung aus.
Beispiel: 1,35 · 5,3 · 6,85
Die erste Multiplikation (1,35 · 5,3) ersetzt man durch die Division mit dem Kehrwert (1,35 : 1/5,3) und kann danach sofort mit 6,85 multiplizieren.
Einstellung: D 1,35 I CI 5,3
(C 10 I D: 7,15 Zwischenresultat braucht nicht abgelesen zu werden)
C 6,85 I D: 49

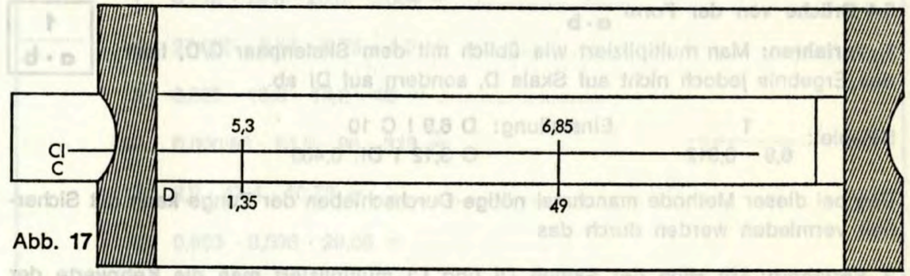


Abb. 17

Natürlich kann auch hier wieder auf die Skalen CF/DF/CIF übergegangen werden.

5.2 Brüche von der Form $\frac{a \cdot b}{c}$, $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$ usw.

$\boxed{\frac{a \cdot b}{c}}$ $\boxed{\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}}$

Die Berechnung derartiger Ausdrücke erfolgt im Zick-Zack:

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e},$$

man beginnt also mit einer Division, dann folgt eine Multiplikation, dann wieder eine Division und so fort. Auf diese Weise können immer je zwei Rechenoperationen mit nur einer Zungenverschiebung ausgeführt werden, da jede Division die Zunge bereits in die Ausgangsposition für die folgende Multiplikation bringt.

Beispiel: $\frac{7{,}35 \cdot 1{,}38 \cdot 6{,}3}{4{,}75 \quad 8{,}1}$

Einstellung: D 7,35 I C 4,75
C 1,38 I D: 2,135 wird mit dem Läuferstrich festgehalten
D 2,135 I C 8,1
C 6,3 I D: 1,661

Auch hier ist wieder die Zusammenarbeit mit dem Skalenpaar CF/DF vorteilhaft.

Beispiel: $\dfrac{3{,}82 \cdot 1{,}57}{7{,}6}$

Einstellung: D 3,82 I C 7,6
CF 1,57 I DF: 0,789

5.3 Brüche von der Form $\dfrac{a}{b \cdot c}$, $\dfrac{a \cdot b}{c \cdot d \cdot e}$ usw.

$$\boxed{\dfrac{a}{b \cdot c}} \quad \boxed{\dfrac{a \cdot b}{c \cdot d \cdot e}}$$

Auch hier wird das in 5.2 beschriebene Zick-Zack-Verfahren angewendet, wobei jedoch zuletzt eine Division übrig bleibt. Diese wird durch eine Multiplikation mit dem Kehrwert ersetzt.

Beispiel: $\dfrac{24{,}5}{4{,}95 \cdot 2{,}23}$

Einstellung: D 2,45 I C 4,95
CI 2,23 I D: 2,22

5.4 Brüche von der Form $\dfrac{1}{a \cdot b}$

$$\boxed{\dfrac{1}{a \cdot b}}$$

1. Verfahren: Man multipliziert wie üblich mit dem Skalenpaar C/D, liest das Ergebnis jedoch nicht auf Skala D, sondern auf DI ab.

Beispiel: $\dfrac{1}{6{,}9 \cdot 0{,}312}$ Einstellung: D 6,9 I C 10
C 3,12 I DI: 0,465

Das bei dieser Methode manchmal nötige Durchschieben der Zunge kann mit Sicherheit vermieden werden durch das

2. Verfahren: Mit Hilfe der Skalen DI und CI multipliziert man die Kehrwerte der Faktoren a und b:

$$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$$

Beispiel: $\dfrac{1}{8{,}35 \cdot 1{,}64}$ Einstellung: DI 8,35 I C 1
CI 1,64 I D: 0,073

Bei dieser Methode wird das Durchschieben der Zunge durch den Übergang auf das Skalenpaar CIF/DF erspart.

Beispiel: $\dfrac{1}{3{,}88 \cdot 2{,}06}$ Einstellung: DI 3,88 I C 1
CIF 2,06 I DF: 0,1251

Üben Sie diese wichtigen Rechenoperationen gründlich durch Bearbeitung des Arbeitsblattes Nr. 8

Arbeitsblatt Nr. 8 a

Vereinfachen Sie die folgenden Multiplikationen durch Verwendung der Reziprokskala so weit wie möglich:

1. 7,2 · 3,2 · 6,4 = ...
2. 4,96 · 3,28 · 320 000 = ...
3. 0,028 · 7,85 · 1,19 = ...
4. 0,246 · 930 · 1480 · 5,8 = ...
5. 0,0059 · 0,0627 · 8,92 · 15 = ...
6. 87 · 4390 · 3,45 = ...
7. 0,718 · 19,6 · 25,6 · 0,064 = ...
8. 27 000 · 3,14 · 5,75 · 4,2 = ...
9. 0,825 · 13,6 · 14,2 · 48 = ...
10. 0,000 63 · 54,5 · 96 · 318 = ...
11. 2,9 · 47,4 · 10,73 = ...
12. 0,803 · 0,598 · 29,06 = ...
13. 0,35 · 0,46 · 0,85 = ...
14. 9,05 · 378 · 0,004 49 · 13,4 = ...
15. 875 · 486 · 3,14 · 7,37 · 0,003 87 = ...
16. 940 · 380 · 683 · 0,0048 · 0,573 = ...
17. 0,3205 · 680 000 · 5,41 · 8,24 · 0,003 = ...
18. 312 · 0,65 · 1,8 · 74,6 · 0,1565 = ...
19. 1,30 · 2,70 · 5,40 · 11 = ...
20. 8,09 · 0,0732 · 0,289 · 0,006 34 · 0,4 = ...

Ergebnisse: 1. 147,5; 2. $5{,}21 \cdot 10^6$; 3. 0,2615; 4. $1{,}964 \cdot 10^6$; 5. 495; 6. $1{,}318 \cdot 10^6$; 7. 23,05; 8. $2{,}045 \cdot 10^6$; 9. $7{,}65 \cdot 10^3$; 10. 1048; 11. 1475; 12. 13,95; 13. 0,1368; 14. 206; 15. $3{,}81 \cdot 10^4$; 16. $6{,}71 \cdot 10^4$; 17. $2{,}915 \cdot 10^4$; 18. $4{,}26 \cdot 10^3$; 19. 208,5; 20. $4{,}34 \cdot 10^{-4}$.

Arbeitsblatt Nr. 8 b

Bei vielen der folgenden Aufgaben ist es nützlich, die Größenordnung des Ergebnisses durch Abspaltung von Zehnerpotenzen zu bestimmen.

1. $\dfrac{1{,}26 \cdot 8{,}65}{0{,}0654} = \ldots\ldots$

2. $\dfrac{4{,}82 \cdot 394}{16{,}7} = \ldots\ldots$

3. $\dfrac{0{,}0047 \cdot 4{,}05 \cdot 14{,}6}{64{,}8 \cdot 18{,}4} = \ldots\ldots$

4. $\dfrac{4{,}31 \cdot 6980 \cdot 98 \cdot 0{,}003\,71}{0{,}002\,71 \cdot 543 \cdot 62{,}4} = \ldots\ldots$

5. $\dfrac{3840 \cdot 96{,}5 \cdot 5{,}05}{8060 \cdot 0{,}94} = \ldots\ldots$

6. $\dfrac{0{,}004\,08 \cdot 0{,}89 \cdot 37{,}6}{319 \cdot 67{,}5 \cdot 9{,}04} = \ldots\ldots$

7. $\dfrac{74{,}2}{18{,}7 \cdot 459} = \ldots\ldots$

8. $\dfrac{0{,}000\,108}{0{,}0795 \cdot 0{,}34} = \ldots\ldots$

9. $\dfrac{67\,400}{286 \cdot 843} = \ldots\ldots$

10. $\dfrac{7{,}41 \cdot 56{,}3}{0{,}95 \cdot 438 \cdot 86} = \ldots\ldots$

11. $\dfrac{102{,}5 \cdot 46{,}8}{54{,}3 \cdot 87{,}9 \cdot 370} = \ldots\ldots$

12. $\dfrac{0{,}0648 \cdot 0{,}403 \cdot 0{,}088}{78{,}6 \cdot 10{,}02 \cdot 0{,}0302 \cdot 57} = \ldots\ldots$

13. $\dfrac{1}{792 \cdot 45{,}9} = \ldots\ldots$

14. $\dfrac{1}{0{,}76 \cdot 0{,}0204} = \ldots\ldots$

15. $\dfrac{1}{24{,}7 \cdot 94{,}3 \cdot 0{,}604} = \ldots\ldots$

Ergebnisse: 1. 166,7; 2. 113,7; 3. $2{,}33 \cdot 10^{-4}$; 4. 119,2; 5. 247; 6. $7{,}015 \cdot 10^{-8}$; 7. $8{,}64 \cdot 10^{-3}$; 8. $3{,}995 \cdot 10^{-3}$; 9. 0,2795; 10. 0,011 66; 11. $2{,}715 \cdot 10^{-3}$; 12. $1{,}695 \cdot 10^{-6}$; 13. $2{,}75 \cdot 10^{-5}$; 14. 64,5; 15. $7{,}11 \cdot 10^{-4}$.

6. Die Quadratskalen A und B

6.1 Die Teilung der Skalen A und B

Auf den Skalen A und B findet sich die Teilung der Skalen C und D im Maßstab 1:2 verkleinert und zweimal aneinandergereiht.

Die Beschriftung geht von 1 bis 100, so daß man sich auf der rechten Hälfte hinter den Ziffern 2 bis 9 jeweils eine Null zu denken hat.

6.2 Multiplikation und Division

Mit dem Skalenpaar A/B kann man genau so multiplizieren und dividieren wie mit dem Skalenpaar C/D odre CF/DF, wegen der halbierten Skalenlänge ist die Genauigkeit jedoch entsprechend kleiner.

Produkt a · b: Faktor a wird auf Skala A mit dem Läuferstrich eingestellt. Dies kann in der linken oder in der rechten Skalenhälfte geschehen.

Dann wird B 1, B 10 oder B 100 unter den Läuferstrich gestellt, je nachdem, was am bequemsten ist. Senkrecht über B b (einerlei, ob auf der linken oder rechten Skalenhälfte) wird auf A das Produkt a · b abgelesen.

Beispiele:
1. $4{,}2 \cdot 5 = 21$; Einstellung: A 4,2 | B 1
   B 5 | A: 21
2. $76 \cdot 0{,}45 = 34{,}2$; Einstellung: A 76 | B 100
   B 0,45 | A: 34,2
3. $8{,}6 \cdot 39 = 336$; Einstellung: A 8,6 | B 10
   B 39 | A: 336

Zur Übung können Sie sich das Arbeitsblatt 4 nochmals vornehmen.

Quotient a : b: A a | B b
B 1 (bzw. B 10 bzw. B 100) | A: (a : b)

Beispiele:
1. $\dfrac{76}{138} = 0{,}55$; Einstellung: A 76 | B 138 (beide Werte nahe der Skalenmitte)
   B 10 | A: 0,55
2. $\dfrac{112}{69} = 1{,}62$; Einstellung: A 112 | B 69 (beide Werte nahe der Skalenmitte)
   B 10 | A: 1,62

Zur Übung können Sie die Arbeitsblätter 6 a und 6 b nochmals bearbeiten.

Die Multiplikation und Division auf den Skalen A/B ist jedoch nur dann interessant, wenn man mit dem Quadrat einer gegebenen Zahl multiplizieren oder dividieren will (siehe unten) und die geringere Genauigkeit in Kauf nimmt.

Mit den Wurzelskalen des NOVO-DUPLEX (Abschnitt 10) können diese und die folgenden Rechenoperationen mit größerer Genauigkeit ausgeführt werden.

6.3 Quadrieren

$\boxed{a^2}$ $\boxed{D \mid A}$ $\boxed{C \mid B}$

Der Übergang von D nach A oder von C nach B liefert das Quadrat der auf D bzw. C eingestellten Ziffernfolge:

D x | A: x^2 und C x | B: x^2

Ist a eine Zahl zwischen 1 und 10, dann erhält man auf diese Weise auch die richtige Größenordnung für a^2.

Beispiele: $2{,}3^2 = 5{,}29$; $7{,}28^2 = 53$

Liegt a nicht gerade zwischen 1 und 10, dann muß die Größenordnung des Quadrats entweder geschätzt oder mittels Zehnerpotenzen gefunden werden.

Beispiele:
1. $23\,600^2 = (2{,}36 \cdot 10^4)^2 = 2{,}36^2 \cdot 10^8 = 5{,}57 \cdot 10^8$
2. $0{,}008\,63^2 = (8{,}63 \cdot 10^{-3})^2 = 8{,}63^2 \cdot 10^{-6} = 74{,}5 \cdot 10^{-6}$

Mit den so ermittelten Quadraten kann auf den Skalen A und B sofort weitergerechnet werden:

6.3.1 Produkte und Quotienten mit Quadraten: $a^2 b$, $\frac{a^2}{b}$, $\frac{a}{b^2}$, $\frac{a \cdot b^2}{c}$, $\frac{a \cdot b}{c^2}$ usw.

Die Berechnung der Produkte und Quotienten erfolgt hier auf dem Skalenpaar A/B; die dabei benötigten Quadrate erhält man einfach durch den Übergang C | B oder D | A.

Beispiele:

1. $2{,}36^2 \cdot 4{,}85 = 27{,}0$; Einstellung: D 2,36 | B 1
   B 4,85 | A: 27
2. $72 \cdot 5{,}05^2 = 1840$; Einstellung: A 72 | B 100
   C 5,05 | A: 1840
3. $\frac{16{,}7^2}{19{,}4} = 14{,}4$; Einstellung: D 16,7 | B 19,4
   B 100 | A: 14,4
4. $\frac{8{,}7}{9{,}35^2} = 0{,}0995$; Einstellung: A 8,7 | C 9,35
   B 100 | A: 0,0995
5. $\frac{34 \cdot 3{,}02^2}{79} = 3{,}93$; Einstellung: A 34 | B 79
   C 3,02 | A: 3,93 (Multiplikation mit $3{,}02^2$)
6. $\frac{265 \cdot 68}{53{,}5^2} = 63$; Einstellung: A 265 | C 53,5
   (Division durch $53{,}5^2$)
   B 68 | A: 63

Übungen auf dem Arbeitsblatt Nr. 9.

6.3.2 Tabelle der Funktion $a\,x^2$

$\boxed{a\,x^2}$

Beispiel: Tabelle $6{,}4\,x^2$
Einstellung: A 6,4 | B 10
C x | A: $6{,}4\,x^2$

x	2	3	5	1,41	21,2	8,45	93
$6{,}4\,x^2$	25,6	57,6	160				

Ergebnisse: 12,72 2875 457 $5{,}535 \cdot 10^4$

6.3.3 Tabelle der Funktion $a^2\,x$

$\boxed{a^2\,x}$

Beispiel: Tabelle $0{,}81^2\,x$
Einstellung: D 0,81 | C 10 (= B 100)
B x | A: $0{,}81^2\,x$

x	2	3	7,5	11,2	0,35	0,86
$0{,}81^2\,x$	1,31	1,968				

Ergebnisse: 4,92 7,35 0,2295 0,564

6.3.4 Tabelle der Funktion $\frac{a}{x^2}$

$\boxed{\frac{a}{x^2}}$

Beispiel: Tabelle $\frac{54}{x^2}$
Einstellung: A 54 | B 100
CI x | A: $\frac{54}{x^2}$

x	2	3	12,5	16,1	7,2	9,4
$\frac{54}{x^2}$	13,5	6				

Ergebnisse: 0,3455 0,2085 1,042 0,611

6.3.5 Tabelle der Funktion $a^2\,x^2$

$\boxed{a^2\,x^2}$

Einstellung: D a | C 1 (10)
C x | A: $a^2\,x^2$

6.3.6 Tabelle der Funktion $\frac{x^2}{a^2}$

$\boxed{\frac{x^2}{a^2}}$

Einstellung: DI a | C 1 (10)
C x | A: $\frac{x^2}{a^2}$

6.3.7 Tabelle der Funktion $\frac{a^2}{x^2}$

$\boxed{\frac{a^2}{x^2}}$

Einstellung: D a | CI 1 (10)
CI x | A: $\frac{a^2}{x^2}$

Bearbeiten Sie nun Arbeitsblatt Nr. 9.

Arbeitsblatt Nr. 9

1. $14{,}2^2 =$ ....
2. $73{,}5^2 =$ ....
3. $0{,}43^2 =$ ....
4. $359^2 =$ ....
5. $0{,}0027^2 =$ ....
6. $4180^2 =$ ....
7. $0{,}078^2 =$ ....
8. $62\,400^2 =$ ....
9. $0{,}000\,97^2 =$ ....
10. $694\,000^2 =$ ....
11. $(4{,}86 \cdot 2{,}03)^2 =$ ....
12. $(0{,}605 \cdot 0{,}038)^2 =$ ....
13. $(34{,}2 \cdot 105)^2 =$ ....
14. $(0{,}072 \cdot 0{,}0053)^2 =$ ....
15. $(812 \cdot 94)^2 =$ ....
16. $(0{,}742 : 3{,}14)^2 =$ ....
17. $(84{,}5 : 0{,}67)^2 =$ ....
18. $(0{,}695 : 0{,}048)^2 =$ ....
19. $(319 : 7600)^2 =$ ....
20. $(0{,}0014 : 0{,}057)^2 =$ ....
21. $27{,}5 \cdot 3{,}60 =$ ....
22. $1{,}93^2 \cdot 86 =$ ....
23. $5{,}12^2 \cdot 97 =$ ....
24. $3{,}24 \cdot 4{,}8^2 =$ ....
25. $86 \cdot 34{,}2^2 =$ ....
26. $\dfrac{42{,}6^2}{85} =$ ....
27. $\dfrac{0{,}29}{0{,}93^2} =$ ....
28. $\dfrac{32{,}4^2}{17{,}4} =$ ....
29. $\dfrac{1080}{76^2} =$ ....
30. $\dfrac{92{,}1 \cdot 6{,}73^2}{424} =$ ....
31. $\dfrac{2{,}06 \cdot 73}{7{,}8^2} =$ ....
32. $\dfrac{5{,}63^2 \cdot 7{,}6}{2{,}4^2} =$ ....
33. $\dfrac{13{,}1^2 \cdot 0{,}45}{9{,}2^2} =$ ....
34. $\dfrac{4{,}7^2 \cdot 3{,}18^2}{8{,}12^2} =$ ....

Ergebnisse: 1. 201,5; 2. $5{,}4 \cdot 10^3$; 3. 0,1849; 4. $1{,}289 \cdot 10^5$; 5. $7{,}29 \cdot 10^{-6}$; 6. $1{,}747 \cdot 10^7$; 7. $6{,}08 \cdot 10^{-3}$; 8. $3{,}89 \cdot 10^9$; 9. $9{,}41 \cdot 10^{-7}$; 10. $4{,}815 \cdot 10^{11}$; 11. 97,3; 12. $5{,}29 \cdot 10^{-4}$; 13. $1{,}29 \cdot 10^7$; 14. $1{,}456 \cdot 10^{-7}$; 15. $5{,}825 \cdot 10^9$; 16. 5,43; 17. 3205; 18. $1{,}113 \cdot 10^{-3}$; 19. $5{,}88 \cdot 10^{12}$; 20. $6{,}37 \cdot 10^{-10}$; 21. $2{,}72 \cdot 10^3$; 22. 320,5; 23. 2545; 24. 53,9; 25. $1{,}006 \cdot 10^5$; 26. 21,35; 27. 0,335; 28. 60,3; 29. 0,187; 30. 9,84; 31. 2,47; 32. 41,8; 33. 0,912; 34. 3,39.

Weitere Übungen finden Sie auf dem Arbeitsblatt Nr. 16 (Seite 82).

6.4 Quadratwurzelziehen

$\sqrt{a}$

A | D

B | C

Der Übergang von Skala A bzw. B auf Skala D bzw. C liefert die Quadratwurzel jeder Zahl zwischen 1 und 100. Dabei ist zu beachten, daß Zahlen zwischen 1 und 10 auf der linken Hälfte, Zahlen zwischen 10 und 100 auf der rechten Hälfte der Skala A bzw. B eingestellt werden müssen.

Positive Zahlen unter 1 sowie Zahlen über 100 werden als Produkt einer Zahl zwischen 1 und 100 und einer Zehnerpotenz mit **geradzahliger** Hochzahl dargestellt. (Man verschiebe dabei das Komma schrittweise um jeweils 2 Stellen, bis man eine Zahl zwischen 1 und 100 erhält.)

Beispiele:
1. $\sqrt{14\,800} = \sqrt{1{,}48 \cdot 10^4} = \sqrt{1{,}48} \cdot 10^2 = 1{,}217 \cdot 10^2$
2. $\sqrt{148\,000} = \sqrt{14{,}8 \cdot 10^4} = \sqrt{14{,}8} \cdot 10^2 = 3{,}85 \cdot 10^2$
3. $\sqrt{0{,}00459} = \sqrt{45{,}9 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{45{,}9} \cdot 10^{-2} = 6{,}77 \cdot 10^{-2}$
4. $\sqrt{0{,}0459} = \sqrt{4{,}59 \cdot 10^{-2}} = \sqrt{4{,}59} \cdot 10^{-1} = 2{,}14 \cdot 10^{-1}$

Mit Hilfe der Wurzelskalen des NOVO-DUPLEX können Quadratwurzeln mit größerer Genauigkeit berechnet werden (Abschnitt 10.6).

Lösen Sie nun die Aufgaben 1-14 von Arbeitsblatt 10.

6.4.1 Tabelle der Funktion $a\sqrt{x}$

$a\sqrt{x}$

Beispiel: $13{,}4 \cdot \sqrt{x}$ Einstellung: D 13,4 | C 1
B x | D: $13{,}4 \cdot \sqrt{x}$

x	2	3	12	6,65	17,4	110
$13{,}4\sqrt{x}$	18,95	23,2	46,4			

Ergebnisse: 34,55 55,9 140,5

6.4.2 $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$

$\dfrac{\sqrt{a}}{b}$

Beispiel: $\dfrac{\sqrt{19{,}2}}{4{,}6}$ Einstellung: A 19,2 | C 4,6
C 10 | D: 0,953

6.4.3 $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$

$\dfrac{a}{\sqrt{b}}$

Beispiel: $\dfrac{5{,}45}{\sqrt{47}}$ Einstellung: D 5,45 | B 47
C 10 | D: 0,795

6.4.4 $\frac{1}{\sqrt{a}}$

$\frac{1}{\sqrt{a}}$	
B	CI
A	DI

Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{13,4}}$ Einstellung: B 13,4 | CI: 0,273
oder A 13,4 | DI: 0,273

6.4.5 Tabelle der Funktion $\frac{a}{\sqrt{x}}$

$\frac{a}{\sqrt{x}}$

Diese Aufgabe wird gelöst mit Hilfe der **Multiplikation auf den beiden Reziprokskalen CI und DI,** mit denen man ja genau so multiplizieren (und dividieren) kann wie mit den Skalen C und D.

Beispiel $1,26 \cdot 2,88$ Einstellung: DI 1,26 | CI 1
CI 2,88 | DI: 3,63

Nun zu der eigentlichen Aufgabe:

Beispiel: Tabelle $\frac{12,4}{\sqrt{x}}$

Einstellung: DI 12,4 | CI 1
B x | DI: $12,4/\sqrt{x}$

bei Castell-Duplex: D 12,4 | C 1
BI x | C: $12,4/\sqrt{x}$

x	10	20	45	8,1	170
$\frac{12,4}{\sqrt{x}}$	3,92	2,77			

Ergebnisse: 1,848 4,36 0,951

Bearbeiten Sie nun die Aufgaben 15 bis 23 auf Arbeitsblatt Nr. 10.

Arbeitsblatt Nr. 10

1. $\sqrt{7,4}$ = ...
2. $\sqrt{36,3}$ = ...
3. $\sqrt{204}$ = ...
4. $\sqrt{730}$ = ...
5. $\sqrt{0,87}$ = ...
6. $\sqrt{0,43}$ = ...
7. $\sqrt{0,0077}$ = ...
8. $\sqrt{0,0039}$ = ...
9. $\sqrt{6590}$ = ...
10. $\sqrt{47\,500}$ = ...
11. $\sqrt{0,000\,56}$ = ...
12. $\sqrt{220\,000}$ = ...
13. $\sqrt{0,000\,092}$ = ...
14. $\sqrt{9500}$ = ...
15. $\sqrt{83,5 \cdot 7,9}$ = ...
16. $3,89 \cdot \sqrt{0,56}$ = ...
17. $\sqrt{420} : 13,4$ = ...
18. $\sqrt{0,072} : 0,37$ = ...
19. $\frac{1}{\sqrt{305}}$ = ...
20. $\frac{1}{\sqrt{0,042}}$ = ...
21. $\frac{1}{\sqrt{5600}}$ = ...
22. $96 : \sqrt{115}$ = ...
23. $7,8 : \sqrt{0,83}$ = ...
24. $\sqrt{216} \cdot \sqrt{0,083}$ = ...
25. $\sqrt{57,5} : \sqrt{9,6}$ = ...

Ergebnisse: 1. 2,72; 2. 6,025; 3. 14,28; 4. 27,0; 5. 0,933; 6. 0,656; 7. 0,087 75; 8. 0,0625; 9. 81,2; 10. 218; 11. 0,023 65; 12. 469; 13. 0,009 59; 14. 97,5; 15. 72,2; 16. 2,91; 17. 1,53; 18. 0,0726; 19. 0,057 25; 20. 4,88; 21. 0,013 36; 22. 8,95; 23. 8,56; 24. 4,235; 25. 2,45.

6.5 Quadratwurzeln aus Produkten und Quotienten

$$\sqrt{a \cdot b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt{\frac{a \cdot b}{c}}$$

Bei Ausdrücken von der Form $\sqrt{a\,b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{\frac{a\,b}{c}}$ und ähnlichen wird zunächst der Radikand mit dem Skalenpaar A/B berechnet und dann durch Übergang auf Skala D die Wurzel gezogen.

Beispiel: $\sqrt{3{,}4 \cdot 7{,}8} = 5{,}15$; Einstellung: A 3,4 | B 1
B 7,8 | D: 5,15

Bei der Berechnung des Produkts müssen wegen des nachfolgenden Radizierens die beiden Faktoren jeweils in der richtigen Dekade (= Skalenhälfte) aufgesucht werden, d. h. Zahlen zwischen 1 und 10 in der linken Dekade, Zahlen zwischen 10 und 100 in der rechten. Auch darf nun die Einstellung der Zunge auf den ersten Faktor nur mit der Marke B 1 oder B 100 erfolgen.

Beispiele: $\sqrt{17{,}2 \cdot 71} = 34{,}94$; Einstellung: A 17,2 | B 100
B 71 | D: 34,95

aber $\sqrt{1{,}72 \cdot 71} = 11{,}05$; Einstellung: A 1,72 | B 1
B 71 | D: 11,05

Nötigenfalls müssen zuvor von den Faktoren Zehnerpotenzen abgespalten werden:

$$\sqrt{326 \cdot 4800} = \sqrt{3{,}26 \cdot 10^2 \cdot 48 \cdot 10^2} = \sqrt{3{,}26 \cdot 48} \cdot 10^2 = 12{,}51 \cdot 10^2 = 1251$$

Einstellung: A 3,26 | B 100
B 48 | D: 12,51

Entsprechendes gilt, wenn der Radikand ein Quotient ist:

$\sqrt{\frac{53}{8{,}7}} = 2{,}47$; Einstellung: A 53 | B 87
B 1 | D: 2,47

aber

$\sqrt{\frac{53}{87}} = 0{,}781$; Einstellung: A 53 | B 87
B 100 | D: 0,781

$$\sqrt{\frac{21\,500}{8\,300}} = \sqrt{\frac{2{,}15 \cdot 10^4}{83 \cdot 10^2}} = \sqrt{\frac{2{,}15}{83}} \cdot 10 = 0{,}161 \cdot 10 = 1{,}61$$

Einstellung: A 2,15 | B 83
B 100 | D: 0,161

$$\sqrt{\frac{345 \cdot 69}{5{,}6}} = \sqrt{\frac{3{,}45 \cdot 10^2 \cdot 69}{5{,}6}} = \sqrt{\frac{3{,}45 \cdot 69}{5{,}6}} \cdot 10 = 6{,}52 \cdot 10 = 65{,}2$$

Einstellung: A 3,45 | B 5,6
B 69 | D: 6,52

Auch diese Rechenoperationen können mit den Wurzelskalen des Novo-Duplex mit größerer Genauigkeit ausgeführt werden.

Bearbeiten Sie nun das Arbeitsblatt Nr. 11.

Arbeitsblatt Nr. 11

1. $\sqrt{18 \cdot 1{,}28} =$ ....
2. $\sqrt{1630 \cdot 0{,}290} =$ ....
3. $\sqrt{479 \cdot 0{,}008\,94} =$ ....
4. $\sqrt{76{,}8 \cdot 4500 \cdot 0{,}147} =$ ....
5. $\sqrt{8{,}4 \cdot 689 \cdot 0{,}062} =$ ....
6. $\sqrt{\frac{0{,}987}{0{,}012}} =$ ....
7. $\sqrt{\frac{6560}{0{,}159}} =$ ....
8. $\sqrt{\frac{86\,000}{45{,}7}} =$ ....
9. $\sqrt{\frac{492}{16{,}3}} =$ ....
10. $\sqrt{\frac{63{,}4}{102}} =$ ....
11. $\sqrt{\frac{586 \cdot 1{,}39}{10{,}2}} =$ ....
12. $\sqrt{\frac{1{,}35 \cdot 31{,}6}{0{,}062}} =$ ....
13. $\sqrt{\frac{4{,}98}{563 \cdot 0{,}0714}} =$ ....
14. $\sqrt{\frac{3{,}26 \cdot 235}{422 \cdot 0{,}953}} =$ ....
15. $\sqrt{\frac{5{,}47 \cdot 644}{0{,}0025 \cdot 12}} =$ ....
16. $\sqrt{\frac{873 \cdot 3{,}42 \cdot 4{,}2}{7{,}31 \cdot 0{,}455}} =$ ....
17. $\sqrt{\frac{1054 \cdot 78{,}5 \cdot 643}{304 \cdot 0{,}767}} =$ ....
18. $\sqrt{\frac{0{,}0365 \cdot 47{,}3}{0{,}146}} =$ ....
19. $\sqrt{\frac{6050}{20{,}5 \cdot 123}} =$ ....
20. $\sqrt{\frac{74}{0{,}98 \cdot 0{,}056}} =$ ....

Weitere Übungen finden Sie auf Arbeitsblatt 16 (Seite 82).

Ergebnisse: 1. 4,80; 2. 21,75; 3. 2,07; 4. 225; 5. 18,95; 6. 9,07; 7. 203; 8. 43,4; 9. 5,49; 10. 0,788; 11. 8,94; 12. 26,23; 13. 0,352; 14. 1,38; 15. 343; 16. 61,4; 17. 478; 18. 3,44; 19. 1,549 (auf Skalenpaar A/B den Kehrwert berechnen und das Ergebnis auf DI ablesen); 20. 36,7.

6.6 Kreisfläche und Zylindervolumen

6.6.1 Durchmesser und Fläche eines Kreises

Für die Fläche q (Querschnitt) eines Kreises mit dem Durchmesser d gilt:

$$q = \frac{\pi}{4}\, d^2$$

Der Durchmesser muß also quadriert und dann mit $\frac{\pi}{4}$ multipliziert werden. Diese beiden Rechenoperationen werden gleichzeitig ausgeführt, wenn man den Läuferstrich über den Wert d auf Skala C oder D stellt und unter der Strichmarke „q" des Läufers auf Skala B bzw. A das Ergebnis abliest.

Begründung: Der Übergang von C auf B bzw. von D auf A ergibt d^2, der anschließende Übergang vom Mittelstrich auf die um die Strecke $\frac{\pi}{4}$ versetzte Strichmarke „q" liefert die Multiplikation mit $\frac{\pi}{4}$.

Beispiele: 1. $d = 2{,}92$ cm; $q = 6{,}7$ cm²
2. $d = 0{,}78$ m; $q = 0{,}478$ m²

Die Berechnung des Kreisdurchmessers aus dem gegebenen Querschnitt geschieht umgekehrt, wobei man lediglich darauf zu achten hat, daß q in der richtigen Hälfte der Skala A bzw B eingestellt wird (siehe dazu Abschnitt 6.4).

Beispiele: 1. $q = 4{,}45$ mm²; $d = 2{,}38$ mm
2. $q = 17$ cm²; $d = 4{,}65$ cm

Übungen:

d	4,65 m		80,5 cm			
q		0,00194 m²		0,0295 km²	720 cm²	0,68 m²

Ergebnisse:

	0,0497 m		0,194 km	30,3 cm	0,931 m
16,98 m²		5090 cm²			

6.6.2 Berechnung von Kreiszylindern

Das Volumen eines Kreiszylinders vom Durchmesser d und der Länge l ist

$$V = \frac{\pi}{4}\, d^2\, l$$

1. Gegeben d und l, gesucht V.
Berechnung des Querschnitts mit der Strichmarke q, Multiplikation mit l mit dem Skalenpaar A/B.

Beispiel: $d = 0{,}237$ m, $l = 1{,}46$ m
Einstellung: A 1,46 | B 1 (Vorbereitung der Multiplikation mit 1,46)
Läufer auf C 0,237
Ablesen unter „q" auf A: 0,0645, $V = 0{,}0645$ m³

2. Gegeben l und V, gesucht d.
Hier wird zuerst V mit den Skalen A/B durch l dividiert.

Beispiel: $V = 0{,}204$ m³, $l = 1{,}89$ m
Einstellung: A 20,4 ($\cdot 10^{-2}$) | B 189 (hier ist die Kommastellung belanglos, daher möglichst bequem: 18,9)
Marke „q" auf B 10
unter Läuferstrich auf C: 0,357, $d = 0{,}357$ m

3. Gegeben V und d, gesucht l.

Beispiel: $V = 8{,}65$ dm³, $d = 1{,}24$ dm
Einstellung: Läufer auf D 1,24 (dann steht unter „q" auf A: 1,208, also $q = 1{,}208$ dm²)
B 1 unter „q" stellen
A 8,65 | B: 7,16, also $l = 7{,}16$ dm

Übungen:

d	7,8 cm	2 mm			2,7 dm	4,6 cm
l	93,5 cm	1300 m	5,40 m	1,85 m		
V			12,6 dm³	0,037 m³	64 dm³	0,89 dm³

Ergebnisse:

		5,45 cm	0,1595 m		
				1,12 m	53,7 cm
4,47 dm³	4,085 dm³				

6.7 Quadratische Proportionen

Beispiel: Bei gleichlangen Zylindern aus demselben Material verhalten sich die Gewichte G wie die Quadrate der Radien r (oder ihrer Durchmesser):

$$\frac{G_1}{r_1^2} = \frac{G_2}{r_2^2}$$

Einstellung: A G_1 | C r_1 oder A G_1 | CF r_1

Dann stehen einander auf den Skalen A und C bzw. CF zusammengehörige Werte von G und r gegenüber (A: Gewichtsskala, C bzw. CF: Radiusskala).

Zahlenbeispiel: Ein Zylinder von 6,3 cm Radius wiegt 86 kp.
Einstellung: A 86 | C 6,3

Gewicht in kp	86	145	50,5	220		
Radius in cm	6,3	8,81			2,72	18,5

Ergebnisse:				
			16,02	7,41
	4,83	10,8		

Übung: Der elektrische Leitwert von gleichlangen Drähten aus dem gleichen Material ist dem Quadrat ihres Durchmessers proportional. Ergänzen Sie folgende Tabelle:

Leitwert in mS[1]	320	500	800	90			
Durchmesser in mm	0,8				0,6	0,12	1,2

Ergebnisse:						
				180	7,2	720
	1,0	1,265	0,424			

6.8 Indirekte quadratische Proportionen

Beispiel: Die Beleuchtungsstärke E ist bei gleichem Einfallswinkel des Lichts dem Quadrat der Entfernung r von der Lichtquelle umgekehrt proportional:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{E_1}{1/r_1^2} = \frac{E_2}{1/r_2^2}$$

Einstellung: A E_1 | CI r_1 oder A E_1 | CIF r_1
Dann stehen einander auf den Skalen A und CI bzw. CIF zusammengehörige Werte von E und r gegenüber (A: Skala der Beleuchtungsstärke, CI bzw. CIF: Skala der Entfernung).

Beim Castell-Duplex ist auch die Einstellung BI E_1 | D r_1 möglich. Man braucht dann den Stab nicht umzudrehen, muß aber gelegentliches Durchschieben in Kauf nehmen.

Zahlenbeispiel: In 1,3 m Entfernung von einer Lichtquelle beträgt die Beleuchtungsstärke 320 Lux.
Einstellung: A 320 | CI 1,3 bzw. BI 320 | D 1,3

Beleuchtungsstärke in Lux	120	790	590	960		
Entfernung in m	2,12	0,827			1	3,2

Ergebnisse:				
			540	52,7
	0,957	0,750		

[1]) mS = Millisiemens

7. Die Kubenskala K

7.1 Die Teilung der Kubenskala

umfaßt die drei Dekaden von 1 bis 1000; man hat sich also hinter jeder Ziffer 2 ... 9 in der zweiten Dekade eine Null, in der dritten Dekade zwei Nullen zu denken.

7.2 Kubieren

a^3
D | K

Der Übergang von D nach K liefert die dritte Potenz der auf D eingestellten Ziffernfolge:

D x | K: x^3

Ist a eine Zahl zwisen 1 und 10, dann erhält man auf diese Weise auch die richtige Größenordnung von a^3.

Beispiele: $1{,}6^3 = 4{,}1$; $3{,}45^3 = 41{,}1$; $7{,}44^3 = 412$

Liegt a nicht zwischen 1 und 10, dann muß die Größenordnung der dritten Potenz wieder geschätzt oder mittels Zehnerpotenzen gefunden werden.

Beispiele: 1. $68^3 = (6{,}8 \cdot 10)^3 = 6{,}8^3 \cdot 10^3 = 314 \cdot 10^3$
2. $0{,}036^3 = (3{,}6 \cdot 10^{-2})^3 = 3{,}6^3 \cdot 10^{-6} = 46{,}7 \cdot 10^{-6}$

Übungen: Arbeitsblatt 12a, Aufgaben 1-7.

7.3 Kubikwurzelziehen

$\sqrt[3]{a}$
K | D

Durch Übergang von K auf D findet man zu jeder Zahl zwischen 1 und 1000 die dritte Wurzel:

K x | D: $\sqrt[3]{x}$

Dabei sind Radikanden zwischen 1 und 10 im ersten Drittel der Skala K einzustellen, Radikanden zwischen 10 und 100 im zweiten, Radikanden zwischen 100 und 1000 im letzten Drittel.

Radikanden, die nicht zwischen 1 und 1000 liegen, müssen zerlegt werden in einen Faktor zwischen 1 und 1000 und eine Zehnerpotenz mit einer durch 3 teilbaren Hochzahl.

Beispiele: 1. $\sqrt[3]{43\,000} = \sqrt[3]{43 \cdot 10^3} = \sqrt[3]{43} \cdot 10 = 3{,}5 \cdot 10 = 35$
2. $\sqrt[3]{580\,000} = \sqrt[3]{580 \cdot 10^3} = \sqrt[3]{580} \cdot 10 = 8{,}34 \cdot 10 = 83{,}4$
3. $\sqrt[3]{0{,}000\,0032} = \sqrt[3]{3{,}2 \cdot 10^{-6}} = \sqrt[3]{3{,}2} \cdot 10^{-2} = 1{,}473 \cdot 10^{-2} = 0{,}014\,74$

Übungen: Arbeitsblatt 12a, Aufgaben 8-20.

7.4 Weitere Rechenoperationen mit der Kubenskala

7.4.1 $\frac{1}{a^3}$

$\frac{1}{a^3}$
DI | K

Beispiel: $\frac{1}{4{,}15^3}$ Einstellung: DI 4,15 | K: 0,014

7.4.2 $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

Beispiel: $\frac{1}{\sqrt[3]{182}}$ Einstellung: K 182 | DI: 0,1764

$\boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}$ K | DI

7.4.3 $a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2} = (\sqrt[3]{a})^2$

Beispiel: $56^{2/3}$ Einstellung: K 56 | A: 14,63

$\boxed{a^{2/3}}$ K | A

7.4.4 $a^{3/2} = \sqrt{a^3} = (\sqrt{a})^3$

Beispiel: $46{,}5^{3/2}$ Einstellung: A 46,5 | K: 317

$\boxed{a^{3/2}}$ A | K

Übungen: Arbeitsblatt 12a, Aufgabe 21.

7.4.5 Kubische Proportionen

Beispiel: Ein Würfel von 3,2 cm Kantenlänge wiegt 127 p.
Was wiegen Würfel aus dem gleichen Material von 1,65 cm; 4,8 cm; 0,41 cm Kantenlänge?

Ansatz:

$$\frac{127\ \text{p}}{(3{,}2\ \text{cm})^3} = \frac{x}{(1{,}65\ \text{cm})^3} = \frac{y}{(4{,}8\ \text{cm})^3} = \frac{z}{(0{,}41\ \text{cm})^3}$$

Einstellung: K 127 | C 3,2
C 1,65 | K: 17,4 $\qquad x = 17{,}4$ p

Entsprechend findet man mit nur jeweils einer Läuferbewegung: $y = 429$ p
$z = 0{,}267$ p

Übung: Welche Kantenlänge hat ein Würfel von 7,6 p; 84 p; 1600 p?
Ergebnisse: 1,25 cm; 2,785 cm; 8,05 cm.

7.4.6 Ausdrücke der Form $a\,b^3$ und $\frac{a}{b^3}$

Beispiele:
1. $27{,}8 \cdot 3{,}06^3 = 797$; Einstellung: K 27,8 | C 1, C 3,06 | K: 797
2. $590 \cdot 7{,}4^3 = 2{,}39 \cdot 10^5$; Einstellung: K 590 | C 10, C 7,4 | K: $2{,}39 \cdot 10^5$
3. $168 : 2{,}74^3 = 8{,}17$; Einstellung: K 168 | C 2,74, C 1 | K: 8,17
4. $630 : 0{,}87^3 = 957$; Einstellung: K 630 | C 0,87, C 10 | K: 957

$\boxed{a \cdot b^3}$

$\boxed{\frac{a}{b^3}}$

Übungen:
1. $5{,}3 \cdot 3{,}8^3 =$ ....
2. $420 \cdot 0{,}46^3 =$ ....
3. $0{,}073 \cdot 13{,}6^3 =$ ....
4. $4650 : 5{,}75^3 =$ ....
5. $9{,}4 : 0{,}082^3 =$ ....
6. $730 : 34^3 =$ ....

Ergebnisse: 1. 291; 2. 40,9; 3. 183,5; 4. 24,5; 5. $1{,}705 \cdot 10^4$; 6. 0,0186.

8. Die pythagoreische Skala P

8.1 Allgemeines

$\boxed{\sqrt{1-a^2}}$

Stellt man den Läuferstrich über eine Zahl x (die jetzt stellenwertgetreu zwischen 1 und 10 liegen muß) der Skala D, so findet man darunter auf Skala P den Wert $y = \sqrt{1-(0{,}1\,x)^2}$. Die Teilung der Skala P ist gegenläufig und daher rot gefärbt.

Beispiel: $\sqrt{1-0{,}364^2}$ Einstellung: D 3,64 | P: 0,9315

Aus $y = \sqrt{1-(0{,}1\,x)^2}$ folgt $x = 10\sqrt{1-y^2}$.
Der Rechenvorgang ist daher auch umgekehrt durchführbar.

Beispiel: $\sqrt{1-0{,}59^2}$ Einstellung entweder: D 5,9 | P: 0,808
oder: P 0,59 | D: 8,08

Zur möglichst genauen Berechnung des Wertes $\sqrt{1-a^2}$ ist es zweckmäßig,
für $a < 0{,}7$ den ersten Weg (Einstellung auf D, Ablesung auf P),
für $a \geq 0{,}7$ den zweiten Weg (Einstellung auf P, Ablesung auf D)
zu wählen, da dann sowohl die Einstellung als auch die Ablesung genauer ist.

Beispiele:
1. $\sqrt{1-0{,}1525^2} = 0{,}9883$ D | P
2. $\sqrt{1-0{,}9822^2} = 0{,}188$ P | D

Man vergleiche die Genauigkeit bei der umgekehrten Einstellung!

Übungen: Arbeitsblatt 12b, Aufgabe 22.

8.2 Weitere Anwendungen der pythagoreischen Skala

8.2.1 Umrechnung von sin α in cos α und umgekehrt

Wegen $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ und $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ kann durch den Übergang D | P oder umgekehrt aus dem Sinus eines Winkels der Kosinus berechnet werden und umgekehrt. Daher ist die pythagoreische Skala bei trigonometrischen Berechnungen (siehe Abschnitt 11) besonders wichtig.

8.2.2 Dreiecksberechnungen mit dem pythagoreischen Lehrsatz

$\boxed{\sqrt{c^2-a^2}}$

Beispiel: Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben die Hypothenuse $c = 24{,}5$ cm und eine Kathete $a = 16{,}8$ cm.
Gesucht die andere Kathete b.

Es ist $b = \sqrt{c^2-a^2} = c\sqrt{1-(a/c)^2} = 24{,}5\ \text{cm}\ \sqrt{1-(16{,}8/24{,}5)^2}$

Einstellung: D 16,8 | C 24,5
C 10 | D: 0,686 | P: 0,7285
D 0,7285 | C 10
C 24,5 | D: 17,85

Übungen: Arbeitsblatt 12b, Aufgabe 23.

8.2.3 Die Funktion $1 - x^2$

ergibt sich durch den Übergang P | A, da $1 - x^2 = (\sqrt{1 - x^2})^2$ ist.

Beispiel: $1 - 0{,}71^2$ Einstellung: P 0,71 | A: 0,496

$\boxed{1 - x^2}$

8.2.4 Die Funktion $(1 - x^2)^{3/2}$

wird berechnet durch den Übergang P | K.

Beispiel: $(1 - 0{,}86^2)^{3/2}$ Einstellung: P 0,86 | K: 0,133

$\boxed{(1 - x^2)^{3/2}}$

8.2.5 Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

ergibt sich durch den Übergang P | DI.

Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}54^2}}$ Einstellung: P 0,54 | DI: 1,188

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$

Übungen: Ergänzen Sie folgende Tabelle:

x	0,685	0,974	0,818	0,42	0,9921	0,2
$1 - x^2$						
$(1 - x^2)^{3/2}$						
$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$						

Ergebnisse:

x	0,685	0,974	0,818	0,42	0,9921	0,2
$1 - x^2$	0,531	0,0513	0,331	0,824	0,015 75	0,96
$(1 - x^2)^{3/2}$	0,387	0,0116	0,190	0,747	0,001 98	0,941
$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	1,372	4,415	1,738	1,101	7,97	1,02

Arbeitsblatt Nr. 12a

1. $0{,}26^3$ = ...	11. $\sqrt[3]{910}$ = ...
2. $7{,}53^3$ = ...	12. $\sqrt[3]{0{,}346}$ = ...
3. $10{,}7^3$ = ...	13. $\sqrt[3]{0{,}097}$ = ...
4. $0{,}0864^3$ = ...	14. $\sqrt[3]{0{,}001\,31}$ = ...
5. $31{,}6^3$ = ...	15. $\sqrt[3]{4450}$ = ...
6. 149^3 = ...	16. $\sqrt[3]{73\,000}$ = ...
7. $0{,}004\,04^3$ = ...	17. $\sqrt[3]{560\,000}$ = ...
8. $\sqrt[3]{49{,}5}$ = ...	18. $\sqrt[3]{1\,720\,000}$ = ...
9. $\sqrt[3]{186}$ = ...	19. $\sqrt[3]{0{,}000\,59}$ = ...
10. $\sqrt[3]{2{,}75}$ = ...	20. $\sqrt[3]{0{,}000\,087}$ = ...

21. Ergänzen Sie folgende Tabelle:

a	64	0,57	112	0,086	604	0,0026
$\frac{1}{a^3}$						
$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$						
$a^{2/3}$						
$a^{3/2}$						

22. Ergänzen Sie:

x	0,366	0,218	0,605	0,9662	0,1345	0,843
$\sqrt{1-x^2}$						

23. a und b seien die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, c seine Hypotenuse. Ergänzen Sie die Tabelle:

a	3,06		67	420
b		112		
c	5,25	189	98	570

21.

$\frac{1}{a^3}$	$0{,}382 \cdot 10^{-5}$	5,40	$0{,}712 \cdot 10^{-6}$	15,72	$0{,}452 \cdot 10^{-8}$	$0{,}569 \cdot 10^{8}$
$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$	0,25	1,206	0,2075	2,265	0,1183	7,275
$a^{2/3}$	16,0	0,6875	23,25	0,195	71,4	0,0189
$a^{3/2}$	512	0,43	1185	0,252	$1{,}485 \cdot 10^{4}$	$1{,}33 \cdot 10^{-4}$

Ergebnisse:
1. 0,0176; 2. 427; 3. 1225; 4. $0{,}645 \cdot 10^{-3}$; 5. $3{,}16 \cdot 10^{4}$; 6. $3{,}31 \cdot 10^{6}$;
7. $6{,}59 \cdot 10^{-8}$; 8. 3,67; 9. 5,71; 10. 1,401; 11. 9,69; 12. 0,702; 13. 0,459;
14. 0,1094; 15. 16,45; 16. 41,8; 17. 82,4; 18. 119,8; 19. 0,0839; 20. 0,0443;
22. 0,9308; 0,976; 0,796; 0,258; 0,9909; 0,5385;
23.

	152,3		
4,265		71,5	385

8.2.6 Die Funktionen $a\sqrt{1-x^2}$ und $\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$

die z. B. in den Formeln der Relativitätstheorie häufig auftreten, lassen sich wie folgt tabellieren:

Beispiele: 1. Tabelle $1{,}49\sqrt{1-x^2}$
Einstellung: D | C 1,49 (der Übergang D|C ergibt dann die Multiplikation mit 1,49)
P x | C: $1{,}49\sqrt{1-x^2}$

x	0,85	0,97	0,98	0,994	0,7	0,6	0,5
$1{,}49\sqrt{1-x^2}$	0,785	0,362					

Ergebnisse: 0,2965; 0,163; 1,064; 1,192; 1,291

2. Tabelle $\frac{2{,}28}{\sqrt{1-x^2}}$
Einstellung: DI 1 | CI 2,28 (der Übergang DI|CI ergibt dann eine Multiplikation mit 2,28)
P x | CI: $2{,}28 / \sqrt{1-x^2}$

x	0,7	0,975	0,2	0,3	0,91	0,98	0,99	0,995
$\frac{2{,}28}{\sqrt{1-x^2}}$	3,19	10,27						

Ergebnisse: 2,335; 2,39; 5,5; 11,45; 16,17; 22,8

9. Die trigonometrischen Skalen und Marken

9.1 Allgemeines

Die trigonometrischen Skalen S, ST, T_1 und T_2 sind in Grad (Altgrad; rechter Winkel $= 90^0$) beschriftet; die Grade sind dezimal unterteilt. Die Umrechnung von Winkelminuten in Dezimalbruchteile eines Grades geschieht einfach mit der Proportion

1^0 entspricht 60′ (D 6 | C 10)

Beispiele: $42{,}5' = 0{,}708^0$; $8{,}4' = 0{,}14^0$; $0{,}225^0 = 13{,}5'$

9.2 Die Skala S (Sinus-Kosinus-Skala)

Die Skala S ist für den Sinus schwarz beschriftet von 5^0 bis 90^0, für den Kosinus rot und rückläufig beschriftet von 85^0 bis 0^0.

Der Übergang von Skala S **schwarz** zu Skala D liefert den Sinus, der Übergang von Skala S **rot** zu Skala D den Kosinus des eingestellten Winkels, wobei man sich vor die Ziffern der Skala D jeweils ein „0," zu denken hat. Umgekehrt erhält man den Arcus-Sinus bzw. den Arcus-Kosinus des eingestellten Wertes.

Beispiele:

α	24^0	$29{,}2^0$	$34{,}6^0$	$52{,}5^0$	79^0
sin α	0,407				
cos α	0,9135				

x	0,86	0,695	0,151	0,203	0,535
arcsin x	$59{,}3^0$				
arccos x	$30{,}7^0$				

Ergebnisse:

sin α	0,488	0,568	0,793	0,982
cos α	0,873	0,823	0,609	0,191

arcsin x	44^0	$8{,}69^0$	$11{,}7^0$	$32{,}3^0$
arccos x	46^0	$81{,}31^0$	$78{,}3^0$	$57{,}7^0$

Da $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ und $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ist, kann man mit Hilfe der pythagoreischen Skala P mit einer einzigen Läufereinstellung den Sinus und den Kosinus eines Winkels erhalten:

Stellt man auf S **schwarz** einen Winkel α ein, so steht senkrecht darüber auf Skala D der Wert sin α, senkrecht darunter auf Skala P der Wert cos α.

Stellt man dagegen α auf S **rot** ein, so steht senkrecht darüber auf D der Wert cos α und senkrecht darunter auf P der Wert sin α.

Es gilt die Farbregel:

Der Übergang zwischen zwei gleich gefärbten Skalen (schwarz - schwarz oder rot - rot) liefert den Sinus bzw. den Arcus-Sinus, der Übergang zwischen zwei ungleich gefärbten Skalen (schwarz - rot oder rot - schwarz) ergibt den Kosinus bzw. Arcus-Kosinus.

Man kann also jeden Funktionswert sin α, cos α, arcsin x und arccos x auf zwei verschiedene Arten bestimmen. Dabei beachte man:

1. **Bei Winkeln unter 45^0 ist die schwarze Markierung der Skala S die genauere, bei Winkeln über 45^0 die rote.**
2. **Bei Werten unter 0,7 ergibt Skala D, bei Werten über 0,7 Skala P die höhere Genauigkeit.**

Beispiele: günstigstes Verfahren:

		Einstellung	Ablesung
Gesucht:	sin $27{,}2^0$	S schwarz	D 0,457
	sin $64{,}5^0$	S rot	P 0,9026
	cos $72{,}3^0$	S rot	D 0,304
	cos $12{,}6^0$	S schwarz	P 0,9759
			S schwarz $22{,}7^0$
			S rot $74{,}7^0$
			S rot $78{,}64^0$
			S schwarz $10{,}63^0$

Die Berechnung von sin α aus cos α und umgekehrt geschieht direkt durch den Übergang von Skala D zu Skala P bzw. umgekehrt (siehe Abschnitt 8.2.1).

9.3 Die Skalen T_1 und T_2 (Tangens- und Kotangensskalen)

Auch diese Skalen sind zweifach beschriftet:

Die Skala T_1 in schwarz von 5^0 bis 49^0 und in rot von 85^0 bis 41^0, die Skala T_2 in schwarz von 41^0 bis 85^0 und in rot von 49^0 bis 5^0. Zusammen mit der Skala D bilden sie eine Tangenstabelle (schwarze Beschriftung) und eine Kotangenstabelle (rote Beschriftung). Beim Arbeiten mit der Skala T_1 hat man sich vor die Ziffern der Skala D jeweils ein „0," zu denken.

Beispiele: $\tan 17{,}6^0 = 0{,}317$; $\tan 82{,}2^0 = 7{,}30$; $\cot 62{,}4^0 = 0{,}523$; $\cot 35^0 = 1{,}428$
$\arctan 0{,}392 = 21{,}4^0$; $\arctan 2{,}92 = 71{,}1^0$
$\operatorname{arccot} 0{,}69 = 55{,}4^0$; $\operatorname{arccot} 4{,}1 = 13{,}7^0$

Da $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ ist, kann man mit Hilfe der Skala DI mit einer einzigen Läufereinstellung den Tangens und den Kotangens bestimmen.

Beispiele: 1. $\tan 19{,}5^0 = 0{,}354$, $\cot 19{,}5^0 = 2{,}824$
Einstellung: T_1 $19{,}5^0$ | D: 0,354 | DI: 2,824
2. $\tan 83{,}5^0 = 8{,}78$, $\cot 83{,}5^0 = 0{,}1139$
Einstellung: T_2 $83{,}5^0$ | D: 8,78 | DI: 0,1139

9.4 Messen und Zeichnen von Winkeln mit Hilfe der Tangensskalen

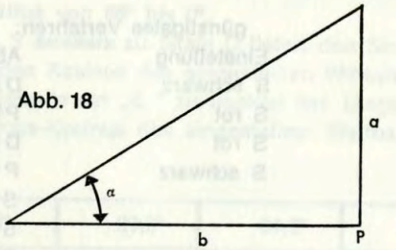
Zusammen mit einem Zeichendreieck (oder einem Zirkel) und einem Maßstab ergeben die Tangensskalen einen Winkelmesser hoher Genauigkeit.

9.4.1 Messen eines gegebenen Winkels

Man errichtet in einem möglichst weit vom Scheitel entfernten Punkt P des einen Schenkels das Lot, schneidet es mit dem anderen Schenkel und mißt die beiden Strecken a und b (s. Abb. 18).

Mit dem Rechenstab berechnet man den Quotienten $\frac{a}{b} = \tan\alpha$ und liest senkrecht über dem Ergebnis auf T_1 (für $\tan\alpha$ zwischen 0,087 und 1) oder T_2 (für $\tan\alpha$ zwischen 1 und 11,4) den dazugehörigen Winkel ab.

Abb. 18



9.4.2 Zeichnen eines Winkels von gegebener Größe

Umkehrung des unter 9.4.1 beschriebenen Verfahrens: Man berechnet aus α zunächst $\tan\alpha$ und zeichnet dann die Strecken a und b so, daß $\frac{a}{b} = \tan\alpha$ ist, also z. B. b = 1 dm, a = $\tan\alpha$ dm.

Beispiel: Für $\alpha = 62{,}5^0$ ist $\tan\alpha = 1{,}92$.
Dann zeichnet man b = 1 dm, a = 1,92 dm oder b = 5 cm, a = 9,6 cm.

Arbeitsblatt Nr. 13

1. Ergänzen Sie folgende Tabelle mit möglichst großer Genauigkeit:

α	$16{,}4^0$	$32{,}6^0$	$58{,}8^0$	$79{,}1^0$				
sin α					0,828		0,9911	
cos α						0,256		0,146

2. Ergänzen Sie folgende Tabelle:

β	$8{,}4^0$	$42{,}8^0$	$79{,}4^0$				
tan β				0,278		8,45	
cot β					1,04		0,098

3. Ergänzen Sie folgende Tabelle mit nur einer Schieberbewegung:

x	2	4	6	8	10
$x \cdot \sin 27{,}2^0$					

4. Desgleichen die folgende Tabelle:

x	2	4	6	8	10
$\frac{\cos 52{,}3^0}{x}$					

5. Berechnen Sie den Ausdruck $\frac{3{,}74 \cdot 1{,}43}{\tan 83{,}1^0}$ mit nur einer Schieberwegung.

6. Desgleichen den Ausdruck $\frac{6{,}25}{1{,}68 \cdot \cot 64{,}1^0}$

7. Desgleichen den Ausdruck $1{,}87 \cdot 3{,}52 \cdot \sin 33{,}8^0$.

8. Ergänzen Sie folgende Tabelle mit nur einer Schieberbewegung:

β	a	a · sin β	a · cos β	a · tan β	a · cot β
$17{,}4^0$	12,4				

9. Ergänzen Sie folgende Tabelle:

β	$\sin^2\beta$	$\sin^3\beta$	$\cos^2\beta$	$\cos^3\beta$	$\tan^2\beta$	$\cot^2\beta$
$22{,}3^0$						

Ergebnisse:

1.

α					55,9°	75,16°	85,35°	81,6°
sin α	0,2825	0,539	0,855	0,9820		0,9667		0,9893
cos α	0,9593	0,8425	0,518	0,1891	0,561		0,1331	

2.

β				15,54°	43,9°	83,25°	84,4°
tan β	0,1477	0,926	5,34		0,961		10,2
cot β	6,77	1,08	0,1871	3,60		0,1183	

3. 0,914; 1,828; 2,74; 3,655; 4,57

4. Hier wird die Division als Multiplikation mit dem Kehrwert ausgeführt (Skala CI und CIF).
0,306; 0,153; 0,1019; 0,0764; 0,0612

5. Bei der Division durch tan 83,1° = 8,26 werden die Rollen der beiden Skalen C und D vertauscht.
Einstellung: T_2 83,1° | C 3,74 (Jetzt steht über D 10 der Quotient 3,74 : 8,26 = 0,453)
DF 1,43 | CF: 0,647 (Die Multiplikation mit 1,43 muß mit Hilfe der versetzten Skalen vorgenommen werden.)
Ergebnis: 0,647

6. Division 6,25 : cot 64,1° wie bei Nr. 5. Die anschließende Division durch 1,68 wird mit Skala DI gemacht.
Einstellung: T_1 rot 64,1° | C 6,25
DI 1,68 | C: 7,66
Ergebnis: 7,66

7. Einstellung: S 33,8° | CI 1,87
C 3,52 | D: 3,665
Ergebnis: 3,665

8. Multiplikation mit vertauschten Skalen.
Einstellung: D 1 | C 12,4
S 17,4° | C: 3,71 = a sin β
S 17,4° | P: 0,9542 = cos β
DF 0,954 | CF: 11,83 = a cos β
T_1 17,4° | C: 3,89 = a tan β
T_2 rot 17,4° | C: 39,6 = a cot β

9. 0,144; 0,0547; 0,856; 0,792; 0,1681; 5,94

9.5 Trigonometrische Berechnungen

9.5.1 Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks

Mit Hilfe der Winkelfunktionen kann das rechtwinklige Dreieck aus einer hinreichenden Zahl von Bestimmungsstücken in bekannter Weise berechnet werden. Im folgenden soll gezeigt werden, wie dies mit nur einer Schieberbewegung (und gelegentlichem Durchschieben) möglich ist.

1. Fall Gegeben 2 Katheten a und b.

Benutzte Formeln: $a \cdot \frac{1}{b} = \tan\alpha$ $\quad \beta = 90° - \alpha$

$a \cdot \frac{1}{c} = \sin\alpha$

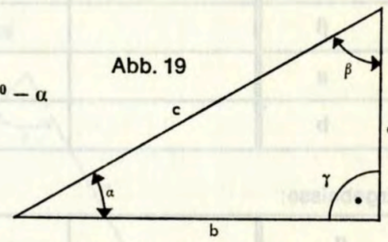


Abb. 19

Beispiel: a = 8,4 cm, b = 6,3 cm
Einstellung: D 8,4 | CI 1
CI 6,3 | T_2: 53,1° = α (für tan α < 1 auf T_1 ablesen!)
S 53,1° | CI: 10,5 c = 10,5 cm

Die Berechnung von β = 90° − α geschieht am einfachsten, indem man den mit dem Läufer auf S eingestellten Winkel mit der roten Beschriftung abliest: β = 36,9°.

Übungen: Ergänzen Sie folgende Tabelle:

a	7,05 cm	4,45 cm	4,95 cm	1,3 dm
b	4,8 cm	5,9 cm	2,08 cm	3,04 dm
α				
β				
c				

Ergebnisse:

α	55,75°	37°	67,2°	23,17°
β	34,25°	53°	22,8°	66,83°
c	8,52 cm	7,39 cm	5,36 cm	3,31 dm

2. Fall: Gegeben die Hypotenuse c und ein Winkel (z. B. α).

Benutzte Formeln: a = c sin α; b = c cos α; β = 90° − α

Beispiel: c = 13,4 cm, α = 37,2°

Einstellung: D 1 | C 13,4 (hier werden die Rollen der Skalen C und D bei der Multiplikation vertauscht: der erste Faktor wird auf C eingestellt.)
S 37,2° | C: 8,1 $a = 8{,}1$ cm
S 37,2° **rot** | C: 10,68 $b = 10{,}68$ cm
$\beta = 52{,}8^0$

Übungen: Ergänzen Sie folgende Tabelle:

c	21,2 cm	27,4 cm	9,25 cm	10,6 cm
α	25,8°	41,5°		9,6°
β			34,3°	
a				
b				

Ergebnisse:

α			55,7°	
β	64,2°	48,5°		80,4°
a	9,23 cm	18,17 cm	7,64 cm	1,77 cm
b	19,1 cm	20,55 cm	5,21 cm	10,45 cm

3. Fall: Gegeben die Hypotenuse c und eine Kathete (z. B. a).

Am bequemsten ist die Benutzung des Sinus-Satzes:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma\ (=1)} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Beispiel: $c = 8{,}65$ cm, $a = 5{,}85$ cm
Einstellung: D 10 | C 8,65 Proportion!
C 5,85 | S: 42,5° $\beta = 47{,}5^0$
S 47,5° | D: 6,38 $b = 6{,}38$ cm

Übungen: Ergänzen Sie folgende Tabelle:

c	7,9 cm	14,8 cm	11,4 cm	19,1 cm
a	3,15 cm	8,6 cm		5,4 cm
b			7,8 cm	
α				
β				

Ergebnisse:

a			8,32 cm	
b	7,25 cm	12,07 cm		18,3 cm
α	23,45°	35,5°	46,85°	16,42°
β	66,55°	54,5°	43,15°	73,58°

9.5.2 Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks

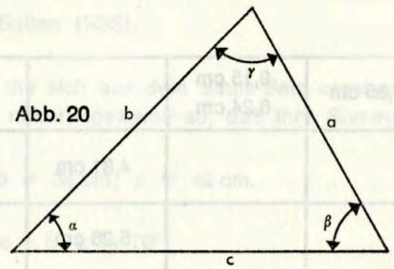


Abb. 20

1. Fall: Gegeben eine Seite und zwei Winkel (WSW).

Lösung mit dem Sinus-Satz $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Beispiel: $a = 6{,}75$ cm, $\beta = 58{,}4^0$, $\gamma = 72{,}5^0$
Daraus ergibt sich zunächst $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma) = 49{,}1^0$

Einstellung: S 49,1° | C 6,75
S 58,4° | C: 7,6 $b = 7{,}6$ cm
S 72,5° | C: 8,52 $c = 8{,}52$ cm

2. Fall: Gegeben zwei Seiten und der Gegenwinkel einer der beiden Seiten (SSW).

Auch hier wird der Sinus-Satz benutzt. Man beachte jedoch, daß die Lösung zweideutig ist, wenn der gegebene Winkel der kleineren der beiden gegebenen Seiten gegenüberliegt.

Beispiel: $a = 6{,}3$ cm, $b = 8{,}2$ cm, $\alpha = 37^0$

Einstellung: S 37° | C 6,3
C 8,2 | S: 51,6° also: $\beta_1 = 51{,}6^0$, $\beta_2 = 180^0 - \beta_1 = 128{,}4^0$
und $\gamma_1 = 91{,}4^0$, $\gamma_2 = 14{,}6^0$

Damit findet man weiter: $\sin 91{,}4^0 = \sin 88{,}6^0$
S 88,6° | C: 10,45 also $c_1 = 10{,}45$ cm
und S 14,6° | C 2,64 also $c_2 = 2{,}64$ cm

Übungen: Ergänzen Sie folgende Tabelle:

a	8,4 cm			4,15 cm		50 cm
β	4,85 cm	9,1 cm	9,8 cm		12 cm	
c		7,7 cm	6,25 cm			
α	71°			48,4°	71°	10,2°
β		51,2°		60°		46,5°
γ			38,3°		54°	

Ergebnisse:

a		11,65 cm	9,15 cm 6,24 cm		13,85 cm	
b				4,81 cm		205 cm
c	8,62 cm			5,26 cm	11,85 cm	236 cm
α	71°	87,5°	65,2° 38,2°			
β	33,1°		76,5° 103,5°		55°	
γ	75,9°	41,3°		71,6°		123,3°

Die beiden folgenden Fälle erfordern zur exakten Lösung die Anwendung des Kosinus-Satzes oder anderer komplizierter Sätze. Bequemer sind hier Näherungsverfahren, die rasch zum Ziel führen.

3. Fall: Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (SWS).

Beispiel: $a = 6{,}4$ cm, $b = 5{,}8$ cm, $\gamma = 59^0$

Man setzt wieder an $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ und sucht α und β so zu bestimmen, daß $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ ist.

Dazu setzt man als 1. Näherung z. B. $\alpha = 60^0$, bestimmt den dazugehörigen Wert β, berechnet die Summe der drei Winkel und korrigiert dann den Wert für α usf.:

	1.	2.	3.
α	60°	65°	65,5°
β	51,7°	55,2°	55,5°
γ	59°	59°	59°
Summe	170,7°	179,2°	180,0°

In der 1. und 2. Näherung ergibt sich eine zu kleine Winkelsumme, weshalb α dann jeweils größer angesetzt wird. Mit dem richtigen Wert errechnet man $c = 6{,}03$ cm.

Übungen siehe unten.

4. Fall: Gegeben drei Seiten (SSS).

Auch hier benutzt man die sich aus dem Sinus-Satz ergebende Proportion und bestimmt die drei Winkel näherungsweise so, daß ihre Summe 180° beträgt.

Beispiel: $a = 46$ cm, $b = 34$ cm, $c = 42$ cm.

Man setzt versuchsweise z. B. $\alpha = 70^0$:

	1.	2.	3.
α	70°	75°	73,7°
β	44°	45,6°	45,2°
γ	59,1°	61,9°	61,1°
Summe	173,1°	182,5°	180°

Übungen: Ergänzen Sie folgende Tabelle:

a		17 cm	4,56 cm	51 cm
b	87,2 cm	12 cm	4,25 cm	65 cm
c	63,3 cm		3,28 cm	45 cm
α	80°			
β				
γ		59,3°		

Ergebnisse:

a	98,5 cm			
b				
c		14,99 cm		
α		$77{,}2^0$	75^0	$51{,}4^0$
β	$60{,}7^0$	$43{,}5^0$	61^0	85^0
γ	$39{,}3^0$		44^0	$43{,}6^0$

9.6 Die Skala ST und die Marke ϱ

9.6.1 Umrechnungen zwischen Bogenmaß und Gradmaß

Die Skala ST arbeitet mit Skala D zusammen und liefert die Umrechnung vom Bogenmaß ins Gradmaß und umgekehrt für Winkel zwischen $0{,}5^0$ und $6{,}5^0$. Dabei hat man sich vor die Ziffern der Skala D jeweils ein „0,0" zu denken.

Beispiele: $0{,}85^0 = 0{,}01484$ rad, $0{,}069$ rad $= 3{,}955^0$

Die Skala kann jedoch auch zur Umrechnung größerer oder kleinerer Winkel benutzt werden, indem man sich zusammengehörige Werte mit der gleichen Zehnerpotenz multipliziert oder dividiert denkt.

Beispiele: Es ist $0{,}056$ rad $= 3{,}21^0$
daraus folgt: $0{,}56$ rad $= 32{,}1^0$
$5{,}6$ rad $= 321^0$
$0{,}0056$ rad $= 0{,}321^0$ usw.

Für die Bestimmung der Kommastellung ist oft die Beziehung nützlich:

$$2\pi \text{ rad} = 6{,}28 \text{ rad} = 360^0$$
und $$1 \text{ rad} = 57{,}3^0$$
sowie $$1^0 = 0{,}01745 \text{ rad}.$$

Die Umrechnung vom Gradmaß ins Bogenmaß und umgekehrt kann auch mittels der Marke ϱ (1745) auf den Skalen C, D, CF, DF, W_1 und W_1' vorgenommen werden. Dies ist jedoch nur von Bedeutung, wenn die größere Genauigkeit der Skalen W_1 und W_1' (siehe Abschnitt 10) gebraucht wird.

9.6.2 Sinus und Tangens kleiner Winkel

Wegen der für hinreichend kleine Winkel α gültigen Beziehungen

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \operatorname{arc}\alpha \approx \cos(90^0-\alpha) \approx \cot(90^0-\alpha)$$

kann die Skala ST auch zur Berechnung des Sinus und Tangens von Winkeln zwischen $0{,}5^0$ und 6^0 sowie des Kosinus und Kotangens von Winkeln zwischen 84^0 und $89{,}5^0$ benutzt werden.

Beispiel: $\sin 2{,}5^0 \approx \tan 2{,}5^0 = \cot 87{,}5^0 \approx \cos 87{,}5^0 \approx 0{,}0436$

Die geringe Abweichung des $\tan\alpha$ von $\operatorname{arc}\alpha$ wird für $\alpha \geqq 4^0$ durch Korrekturmarken rechts der Marken für 4^0, 5^0 und 6^0 berücksichtigt. (Für $\alpha > 5^0$ benutzt man jedoch am besten die Skala T).

Beispiel: $\tan 5^0 = 0{,}0875$

Liegt der Winkel zwischen den mit Korrekturmarken versehenen vollen Graden, so muß das Korrekturintervall nach Augenmaß übertragen werden.

Beispiel: $\tan 4{,}6^0 = 0{,}0805$

Ist der Funktionswert gegeben und der Winkel gesucht, muß man sich vor der Ablesung den Läuferstrich um die Breite des Korrekturintervalls nach links verschoben denken.

Beispiel: $\arctan 0{,}0787 = 4{,}5^0$

Bei kleinen Winkeln kann auch die Marke ϱ zur Bestimmung des Sinus und Tangens benutzt werden. Man stellt C ϱ über D 1, dann ist Skala D (und DF) die Winkel-Skala, C und CF die Sinus-Tangens-Arcus-Skala.

Beispiel: $\sin 2^0 \approx \tan 2^0 \approx \operatorname{arc} 2^0 = 0{,}0349$
$\sin 0{,}2^0 \approx \tan 0{,}2^0 \approx \operatorname{arc} 0{,}2^0 = 0{,}00349.$

9.6.3 Der Tangens von Winkeln nahe 90^0 ($85^0 < \alpha < 90^0$) und der Kotangens kleiner Winkel ($\alpha < 5^0$)

Diese über den Bereich der Skala T_2 hinausgehenden Funktionswerte findet man nach folgenden Überlegungen mit Hilfe der Skalen ST und DI:

Es ist

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{1}{\tan(90^0-\alpha)} \approx \frac{1}{\operatorname{arc}(90^0-\alpha)} \quad (\text{für } \alpha \text{ nahe } 90^0)$$

und

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \approx \frac{1}{\operatorname{arc}\alpha} \quad (\text{für } \alpha < 5^0)$$

Beispiele:

1. $\tan 89^0 = \dfrac{1}{\cot 89^0} = \dfrac{1}{\tan 1^0} \approx \dfrac{1}{\operatorname{arc} 1^0} = 57{,}3$

   Einstellung: ST 1^0 | DI: 57,3

2. $\arctan 26{,}4 = 87{,}83^0$

   Einstellung: DI 26,4 | ST: $2{,}17^0$; $90^0 - 2{,}17^0 = 87{,}83^0$

3. $\cot 3{,}4^0 = \dfrac{1}{\tan 3{,}4^0} \approx \dfrac{1}{\operatorname{arc} 3{,}4^0} = 16{,}83$

   Einstellung: ST $3{,}4^0$ | DI: 16,83

4. arccot 32,8 = 1,746°

Einstellung: DI 32,8 | ST: 1,746°

5. cot 0,35° = 163,7

Einstellung: ST 3,5° | DI: 163,7

(3,5° steht hier mit geändertem Stellenwert für 0,35°)

Übungen: Ergänzen Sie folgende Tabellen:

α	85,8°		88,65°		89,7°	
tan α		18,3		72,5		320

α	1,85°		0,22°		0,1°	
cot α		43,5		181		415

Ergebnisse:

α		86,87°		89,21°		89,821°
tan α	13,62		42,45		191	

α		1,317°		0,3165°		0,138°
cot α	31		261		573	

10. Die Wurzelskalen W_1, W_1', W_2, W_2'

10.1 Allgemeines

Auf der Rückseite des Novo-Duplex befindet sich ein Skalenpaar mit 50 cm Teilungslänge, das in der Mitte ($\sqrt{10} = 3{,}162$) getrennt und dessen rechte Hälfte auf den oberen Teil des Stabes versetzt wurde.

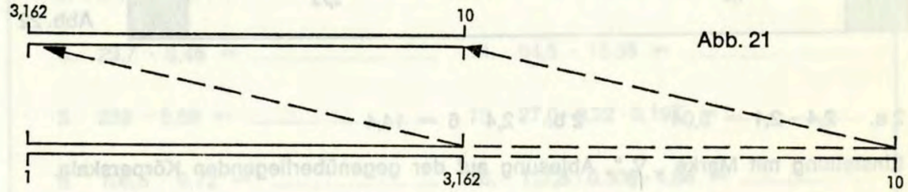


Abb. 21

Mit diesem geteilten Skalenpaar kann man beim Multiplizieren, Dividieren, Quadrieren und Quadratwurzelziehen und beim Bestimmen dekadischer Logarithmen die Genauigkeit eines 50 cm langen Rechenstabes erzielen, ohne dabei auf die Handlichkeit eines Stabes von Normallänge verzichten zu müssen. Nach kurzer Übung wird man mit diesem Skalenpaar und der erforderlichen neuen Rechenregel völlig vertraut sein.

Die Teilung der 50 cm-Skalen ist auf der Schautafel im Anhang erläutert.

10.2 Multiplikation

Bei der Berechnung des Produkts $a \cdot b$ sucht man zunächst wie üblich den ersten Faktor (a) auf der (festen) Körperskala auf. Bei den geteilten Skalen ist a jedoch entweder nur auf der unteren Skala W_1 oder nur auf der oberen Skala W_2 zu finden (wenn man von den Überteilungen einmal absieht).

Liegt a auf W_1, so wird entweder die Marke „1" oder die rote Strichmarke bei $\sqrt{10} = 3{,}162$ der anliegenden Skala W_1' darübergestellt. Liegt a auf W_2, so wird entweder die Marke „10" oder die rote Strichmarke bei $\sqrt{10}$ der anliegenden Skala W_2' daruntergestellt. Dann wird der Faktor b auf der Skala W_1' bzw. W_2' aufgesucht.

Das Produkt $a \cdot b$ steht nun senkrecht unter oder über dem Faktor b, und zwar

auf der dem Faktor b **anliegenden** Körperskala, wenn der erste Faktor mit der Marke „1" oder „10" eingestellt wurde,

auf der dem Faktor b **gegenüberliegenden** Körperskala, wenn der erste Faktor mit einer der beiden roten Strichmarken eingestellt wurde.

Beispiele:

1 a. 1,3 · 2,1 = 2,73   1 b. 1,3 · 4,8 = 6,24

Einstellung mit Marke „1“, Ablesung auf der anliegenden Körperskala.

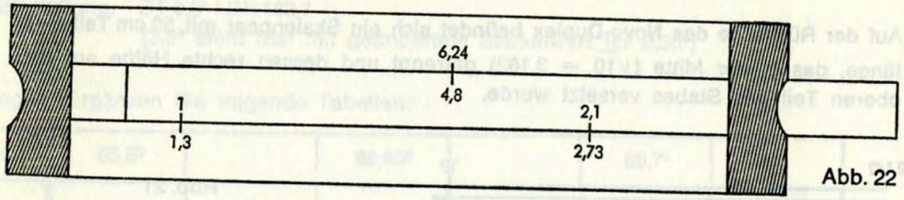


Abb. 22

2 a. 2,4 · 2,1 = 5,04   2 b. 2,4 · 6 = 14,4

Einstellung mit Marke „▽“, Ablesung auf der gegenüberliegenden Körperskala.

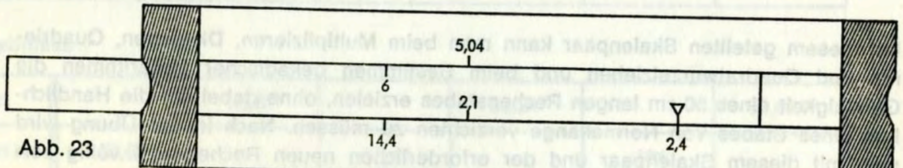


Abb. 23

3 a. 8,3 · 5,2 = 43,15   3 b. 8,3 · 1,9 = 15,77

Einstellung mit Marke „10“, Ablesung auf der anliegenden Körperskala.

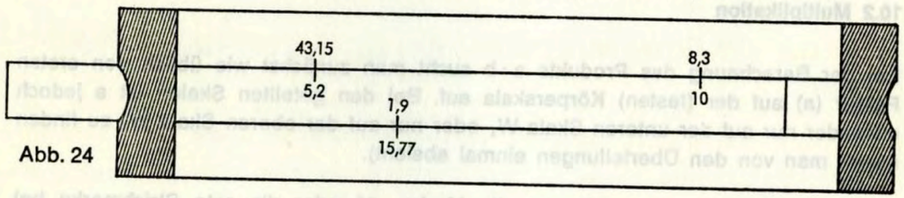


Abb. 24

4 a. 3,8 · 5 = 19   4 b. 3,8 · 2 = 7,6

Einstellung mit Marke „△“, Ablesung auf der gegenüberliegenden Körperskala.

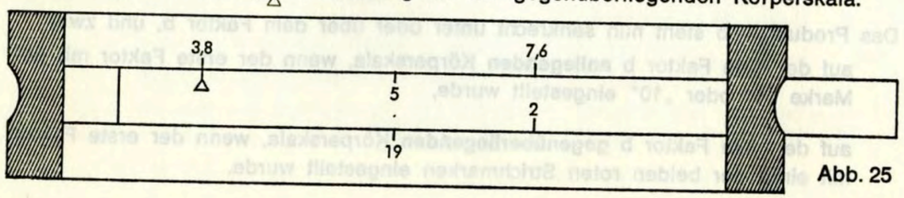


Abb. 25

Arbeitsblatt Nr. 14

1. 15,45 · 1,925 = ...	11. 504 · 0,1865 = ...
2. 139 · 2,74 = ...	12. 72,8 · 41,6 = ...
3. 24,2 · 19,75 = ...	13. 137,5 · 8,34 = ...
4. 29,7 · 8,46 = ...	14. 64,5 · 15,35 = ...
5. 239 · 5,88 = ...	15. 27,6 · 8,22 · 0,197 = ...
6. 106,5 · 9,72 = ...	16. 117,5 · 0,306 · 4,84 = ...
7. 87,6 · 5,08 = ...	17. 92,9 · 0,785 · 1,98 = ...
8. 792 · 0,658 = ...	18. 40,3 · 6,88 · 15,3 = ...
9. 944 · 2,36 = ...	19. 124,5 · 0,0634 · 2,08 = ...
10. 46,3 · 5,12 = ...	20. 26,7 · 48,9 · 0,804 = ...

Ergebnisse: 1. 29,74; 2. 380,9; 3. 478; 4. 251,3; 5. 1405; 6. 1035; 7. 445; 8. 521; 9. 2228; 10. 237; 11. 94; 12. 3028; 13. 1147; 14. 990; 15. 44,7; 16. 174; 17. 144,4; 18. 4242; 19. 16,42; 20. 1050.

Zur weiteren Übung können Sie auch die Arbeitsblätter Nr. 3 und 4 nochmals bearbeiten.

10.3 Division

Zur Berechnung des Quotienten $\frac{a}{b}$ wird der Läuferstrich über den Dividenden a gestellt, der entweder auf W_1 oder W_2 gefunden wird. Dann wird der Divisor b auf W_1' oder W_2' unter den Läuferstrich gestellt. Dabei stehen dann a und b entweder auf benachbarten oder auf gegenüberliegenden Skalen.

Stehen a und b auf benachbarten Skalen, dann findet man den Quotienten auf W_1 oder W_2 unter der Marke „1" von W_1' bzw. über der Marke „10" von W_2'.

Stehen a und b dagegen auf gegenüberliegenden Skalen, dann findet man den Quotienten auf W_1 oder W_2 unter bzw. über einer der beiden roten Strichmarken auf W_1' bzw. W_2'.

Beispiele:

1 a. $2{,}4 : 1{,}8 = 1{,}333$ 1 b. $8 : 6 = 1{,}333$

Einstellung auf anliegenden Skalen, Ablesung unter Marke „1".

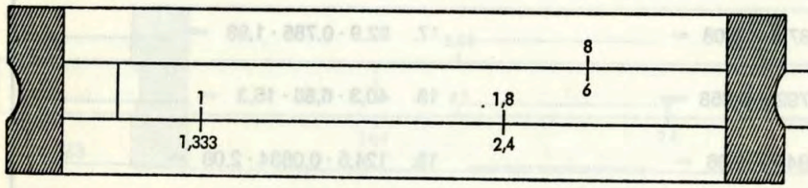


Abb. 26

2 a. $21 : 24 = 0{,}875$ 2 b. $3{,}5 : 4 = 0{,}875$

Einstellung auf anliegenden Skalen, Ablesung über Marke „10".

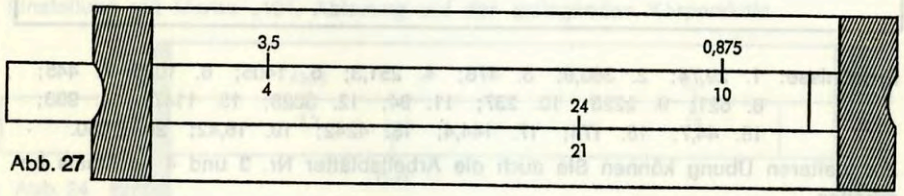


Abb. 27

3 a. $24 : 8 = 3$ 3 b. $57 : 19 = 3$

Einstellung auf gegenüberliegenden Skalen, Ablesung unter Marke „∇".

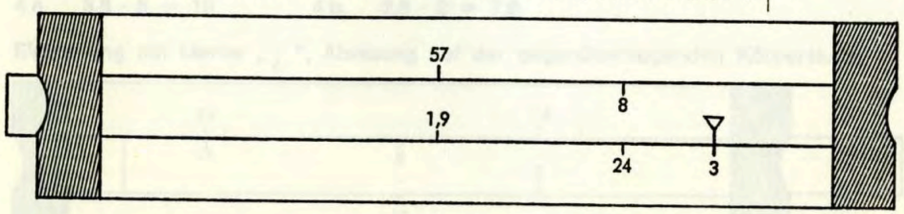


Abb. 28

4 a. $27 : 6 = 4{,}5$ 4 b. $9{,}9 : 2{,}2 = 4{,}5$

Einstellung auf gegenüberliegenden Skalen, Ablesung über Marke „Δ".

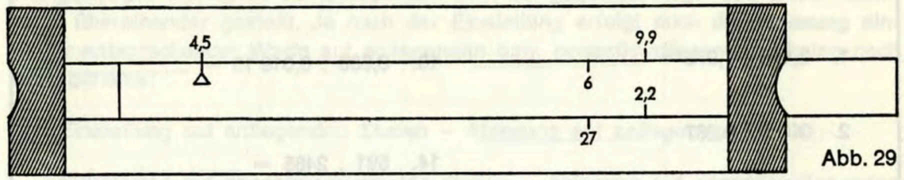


Abb. 29

Wenn bei zusammengesetzten Multiplikationen und Divisionen im Laufe der Rechnung ein Durchschieben der Zunge nötig sein sollte, so denke man daran, daß man mit dem Durchschieben die Art der Einstellung wechselt und daß damit auch die Ablesung verändert werden muß.

Beispiel:

$$\frac{2{,}9 \cdot 7{,}5}{1{,}4}$$

Einstellung: $W_1\,2{,}9 \mid W_1'\,1{,}4$ Einstellung auf anliegenden Skalen
$W_1'\,1 \mid W_1\!: 2{,}071$ (muß nicht abgelesen werden)

Bei der nun folgenden Multiplikation mit 7,5 muß die Zunge durchgeschoben werden. Dabei geht man von der Einstellung mit Marke „1" über auf die Einstellung mit Marke „∇"; man muß daher auf gegenüberliegenden Skalen ablesen: $W_2\,7{,}5 \mid W_1\!: 15{,}54$

Arbeitsblatt Nr. 15

1. $2{,}435 : 1{,}975 =$ ……………
2. $304{,}5 : 0{,}267 =$ ……………
3. $48{,}7 : 362 =$ ……………
4. $0{,}607 : 39{,}8$ ……………
5. $1{,}805 : 29{,}1 =$ ……………
6. $13{,}62 : 0{,}2505 =$ ……………
7. $40{,}35 : 59{,}3 =$ ……………
8. $6410 : 751 =$ ……………
9. $164 : 53{,}6 =$ ……………
10. $287 : 412{,}5 =$ ……………
11. $106{,}5 : 8{,}06 =$ ……………
12. $3815 : 212{,}5 =$ ……………
13. $0{,}688 : 0{,}019\,15 =$ ……………
14. $591 : 2465 =$ ……………
15. $\dfrac{2{,}72 \cdot 4{,}18}{15{,}45} =$ ……………
16. $\dfrac{14{,}05 \cdot 8{,}92}{53{,}1} =$ ……………
17. $\dfrac{494 \cdot 0{,}1875}{26{,}7} =$ ……………
18. $\dfrac{76{,}5 \cdot 19{,}4}{37{,}3} =$ ……………
19. $\dfrac{0{,}1885 \cdot 93{,}8}{4{,}22} =$ ……………
20. $\dfrac{90{,}2 \cdot 3{,}87 \cdot 15{,}7}{23{,}2 \cdot 8{,}93} =$ ……………

Ergebnisse: 1. 1,233; 2. 1140; 3. 0,1345; 4. 0,015 25; 5. 0,062; 6. 54,4; 7. 0,6805; 8. 8,535; 9. 3,06; 10. 0,696; 11. 13,21; 12. 17,95; 13. 35,93; 14. 0,2398; 15. 0,736; 16. 2,36; 17. 3,47; 18. 39,8; 19. 4,19; 20. 26,45.

Zur weiteren Übung können Sie auch die Arbeitsblätter 6a, 6b und 8b nochmals bearbeiten.

10.4 Tabellenbildung und Proportionen

Zur Tabellenbildung und zur Berechnung von Proportionen wird wieder ein zusammengehöriges Wertepaar auf anliegenden oder auf gegenüberliegenden Skalen senkrecht übereinander gestellt. Je nach der Einstellung erfolgt auch die Ablesung einander entsprechender Werte auf anliegenden bzw. gegenüberliegenden Skalen nach dem Schema:

Einstellung auf anliegenden Skalen – Ablesung auf anliegenden Skalen,

Einstellung auf gegenüberliegenden Skalen – Ablesung auf gegenüberliegenden Skalen.

Sollte während der Rechnung ein Durchschieben der Zunge nötig sein, so ändert sich damit die Art der Einstellung und damit auch die der Ablesung!

Beispiele:

1. 1 Seemeile = 1,852 km

Einstellung: W_1 1 | W_1' 1852 W_1/W_2: Seemeilenskala
(anliegende Skalen) W_1'/W_2': Kilometerskala

Dann findet man z. B.: 1,512 sm = 2,80 km; 8,4 km = 4,535 sm sowie nach Durchschieben der Zunge (= Einstellung auf gegenüberliegenden Skalen!)

2,42 sm = 4,482 km
5,3 km = 2,86 sm

2. 26 Zoll = 66 cm

Einstellung: W_1 26 | W_2' 66 W_1/W_2: Zollskala
(gegenüberliegende Skalen) W_1'/W_2': Zentimeterskala

Dann findet man durch Ablesung auf gegenüberliegenden Skalen z. B.:

19 Zoll = 48,22 cm
89 Zoll = 225,9 cm

sowie nach Durchschieben der Zunge (= Einstellung auf anliegenden Skalen!):

11,7 Zoll = 29,7 cm
91 cm = 35,85 Zoll

Übungen:

1. Gegeben eine Proportion $\dfrac{x}{y} = \dfrac{62{,}4}{4{,}47}$

Ergänzen Sie folgende Tabelle:

x	7,82		18,25		36,9	
y		33,4		1,905		0,297

2. Gegeben eine Proportion $\dfrac{a}{b} = \dfrac{7{,}72}{15{,}1}$

Ergänzen Sie folgende Tabelle:

a	56,4		34,1		116	
b		1,87		29,2		3,92

Ergebnisse:

x		466,3		26,6		4,146
y	0,560		1,307		2,643	
a		0,956		14,93		2,004
b	110,3		66,7		226,9	

10.5 Quadrieren

Das Quadrieren einer Zahl erfolgt durch Übergang von W_1 bzw. W_2 auf D oder durch Übergang von W_1' bzw. W_2' auf C. Dabei ist es gleichgültig, ob man dafür die Skalen C und D auf der Rückseite oder auf der Vorderseite des Stabes benutzt.
Beispiele: $15{,}65^2 = 245$; $0{,}264^2 = 0{,}0697$; $4{,}17^2 = 17{,}4$; $79{,}2^2 = 6{,}27 \cdot 10^3$

10.6 Quadratwurzelziehen

geschieht durch Übergang von Skala C auf Skala W_1' bzw. W_2' oder durch Übergang von Skala D auf Skala W_1 bzw. W_2. Dabei stehen die Wurzeln aus Zahlen zwischen 1 und 10 auf Skala W_1' bzw. W_1, die Wurzeln aus Zahlen zwischen 10 und 100 auf Skala W_2' bzw. W_2.

Radikanden, die kleiner als 1 oder größer als 100 sind, werden wieder in einen Faktor zwischen 1 und 100 und eine Zehnerpotenz mit gerader Hochzahl zerlegt (s. Abschnitt 6.4).

Beispiele: $\sqrt{4{,}1} = 2{,}025$; $\sqrt{41} = 6{,}405$; $\sqrt{410} = 20{,}25$; $\sqrt{4100} = 64{,}05$;
$\sqrt{0{,}41} = 0{,}6405$; $\sqrt{0{,}041} = 0{,}2025$

Bearbeiten Sie zur Übung die einschlägigen Aufgaben des Arbeitsblattes Nr. 10.

10.7 Rechenoperationen mit Quadraten und Quadratwurzeln

Nach dem Quadrieren oder Quadratwurzelziehen mit Hilfe der Quadratskalen ist stets ein Weiterrechnen möglich, und zwar nach dem Quadrieren mit der Genauigkeit der Normalskalen (25 cm-Skalen), nach dem Wurzelziehen sogar mit der Genauigkeit der 50 cm-Skalen. So lassen sich u. a. folgende Ausdrücke bequem berechnen:

$\boxed{a^2 \cdot b}$

1. Beispiel: $18{,}2^2 \cdot 4{,}7 = 1557$
Einstellung: W_1 18,2 | C 10
C 4,7 | D: 1557

2. Beispiel: $6{,}84^2 \cdot 10{,}8 = 505$
Einstellung: W_2 6,84 | C 1
C 10,8 | D: 505

$\boxed{a \cdot b^2}$

1. Beispiel: $23{,}7 \cdot 1{,}935^2 = 88{,}7$
Einstellung: D 23,7 | W_1' 1
W_1' 1,935 | D: 88,7

2. Beispiel: $8{,}45 \cdot 7{,}62^2 = 491$
Einstellung: D 8,45 | W_2' 10
W_2' 7,62 | D: 491

$\boxed{\dfrac{a^2}{b}}$

1. Beispiel: $2{,}61^2 : 0{,}382 = 17{,}83$
Einstellung: W_1 2,61 | C 0,382
C 1 | D: 17,83

2. Beispiel: $4{,}13^2 \; 6{,}05 = 2{,}82$
Einstellung: W_2 4,13 | C 6,05
C 10 | D: 2,82

$\boxed{\dfrac{a}{b^2}}$

.1 Beispiel: $58{,}5 : 14{,}6^2 = 0{,}2745$
Einstellung: D 58,5 | W_1' 14,6
C 1 | D: 0,2745

2. Beispiel: $338 : 9{,}22 = 3{,}98$
Einstellung: D 338 | W_2' 9,22
C 10 | D: 3,98

$\boxed{\dfrac{a^2 \cdot b}{c}}$

1. Beispiel: $\dfrac{2{,}64^2 \cdot 1{,}3}{4{,}4} = 2{,}06$
Einstellung: W_1 2,64 | C 4,4 (ergibt $2{,}64^2 : 4{,}4$)
C 1,3 | D: 2,06

2. Beispiel: $\dfrac{4{,}82^2 \cdot 3{,}5}{6{,}15} = 13{,}22$
Einstellung: W_2 4,82 | C 6,15
C 3,3 | D: 13,22

$\boxed{\dfrac{a^2 \cdot b}{c^2}}$

1. Beispiel: $\dfrac{7{,}42^2 \cdot 6}{19{,}4^2} = 0{,}878$
Einstellung: W_2 7,42 | W_1' 19,4
C 6 | D: 0,878

2. Beispiel: $\dfrac{16{,}9^2 \cdot 2{,}4}{9{,}38^2} = 7{,}79$
Einstellung: W_1 16,9 | W_2' 9,38
CF 2,4 | DF: 7,79

1. Beispiel: $\frac{6{,}9 \cdot 3{,}2}{2{,}85^2} = 2{,}72$ $\boxed{\frac{a \cdot b}{c^2}}$

Einstellung: D 6,9 | W_1' 2,85
C 3,2 | D: 2,72

2. Beispiel: $\frac{38{,}8 \cdot 9{,}25}{7{,}22^2} = 6{,}88$

Einstellung: D 38,8 | W_2' 7,22
C 9,25 | D: 6,88

Übungen hierzu finden Sie auf den Arbeitsblättern Nr. 9 und Nr. 16.

Bei Ausdrücken von der Form

$$\sqrt{a \cdot b},\ \sqrt{\frac{a}{b}},\ \sqrt{\frac{a \cdot b}{c}},\ \sqrt{a \cdot b \cdot c}\ \text{usw.}$$

berechnet man den Radikanden zunächst in bekannter Weise mittels der Skalen C und D (und evtl. CI). Das Wurzelziehen geschieht dann durch Übergang auf W_1 bzw. W_2. Die Frage, ob das Ergebnis auf W_1 oder auf W_2 abzulesen ist, entscheidet man unter Beachtung der in 10.6 angegebenen Regel nach Abschätzung der Größenordnung des Radikanden.

Beispiel: $\sqrt{8{,}15 \cdot 3{,}08} = 5{,}01$ $\boxed{\sqrt{a \cdot b}}$

Einstellung: D 8,15 | C 10
C 3,08 | W_2: 5,01

Eine Abschätzung ergibt, daß der Radikand etwa 25 ist, also zwischen 10 und 100 liegt, daher Ablesung der Wurzel auf W_2.

Beispiel: $\sqrt{\frac{64}{9{,}4}} = 2{,}61$ $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}}$

Einstellung: D 64 | C 9,4
C 10 | W_1: 2,61

Der Radikand hat etwa den Wert 7, daher Ablesung auf W_1.

Beispiel: $\sqrt{\frac{2{,}92 \cdot 31{,}6}{0{,}57}} = 12{,}72$ $\boxed{\sqrt{\frac{a \cdot b}{c}}}$

Einstellung: D 2,92 | C 0,57
C 31,6 | W_1: 12,72

Zur Entscheidung der Frage, ob das Ergebnis auf W_1 oder W_2 abzulesen ist, empfiehlt sich hier und bei ähnlichen Aufgaben folgende Überlegung: Der Radikand hat etwa den Wert 160 (Zwischenergebnis unter dem Läuferstrich auf D: 162). Die Wurzel daraus muß bei 13 liegen. Man hat nun zu entscheiden zwischen der Ziffernfolge 1-2-7-2, welche auf W_1 unter dem Läuferstrich steht und der Ziffernfolge 4-2-5, welche auf W_2 unter dem Läuferstrich steht. Ergebnis: 12,72.

Beispiel: $\sqrt{76{,}5 \cdot 0{,}38 \cdot 1{,}56} = 6{,}74$ $\boxed{\sqrt{a \cdot b \cdot c}}$

Einstellung: D 76,5 | CI 0,38
C 1,56 | W_2: 6,74

Abschätzung: Radikand $\approx$ 50, Ergebnis $\approx$ 7.

Auch Ausdrücke der Form

$$\sqrt{a \cdot b} \cdot c \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot c$$

können mit einer einzigen Schieberbewegung berechnet werden:

1. Beispiel: $\sqrt{21{,}8 \cdot 5{,}65} \cdot 18{,}2 = 202$ $\boxed{\sqrt{a \cdot b} \cdot c}$

Einstellung: D 21,8 | CI 5,65
W_1' 18,2 | W_1: 202

Division durch den Kehrwert; der anschließende Übergang auf die W-Skalen liefert die Wurzel, die dann mit 18,2 multipliziert wird.

2. Beispiel: $\sqrt{16{,}4 \cdot 1{,}89} \cdot 6{,}68 = 37{,}2$

Einstellung: D 16,4 | CI 1,89
W_2' 6,68 | W_2: 37,2

1. Beispiel: $\sqrt{\frac{136}{590}} \cdot 894 = 429$ $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot c}$

Einstellung: D 136 | C 590
W_2' 894 | W_2: 429

2. Beispiel: $\sqrt{\frac{369}{16{,}4}} \cdot 5{,}73 = 27{,}18$

Einstellung: D 369 | C 16,4
W_2' 5,73 | W_1: 27,18

Übungen zu diesem Abschnitt finden Sie auf den Arbeitsblättern Nr. 9, Nr. 11 und Nr. 16.

Arbeitsblatt Nr. 16

1. $\dfrac{7{,}08^2 \cdot 9{,}85}{36{,}2} =$ ....
2. $\dfrac{18{,}45^2 \cdot 5{,}38^2}{69{,}5^2} =$ ....
3. $\dfrac{122 \cdot 3{,}41}{6{,}02^2} =$ ....
4. $\dfrac{8{,}36^2 \cdot 37{,}2}{25{,}3^2} =$ ....
5. $4{,}79^2 \cdot 3{,}18 \cdot 0{,}164^2 =$ ....
6. $10{,}85^2 \cdot 0{,}87^2 \cdot 5{,}15 =$ ....
7. $\dfrac{7{,}62^2 \cdot 4{,}55^2 \cdot 0{,}374}{2{,}14^2 \cdot 7{,}75} =$ ....
8. $\sqrt{19{,}1 \cdot 28{,}7} =$ ....
9. $\sqrt{0{,}785 \cdot 0{,}434} =$ ....
10. $\sqrt{\dfrac{571}{0{,}658}} =$ ....
11. $\sqrt{\dfrac{0{,}935}{13{,}8}} =$ ....
12. $\sqrt{\dfrac{0{,}628 \cdot 112}{0{,}843}} =$ ....
13. $\sqrt{\dfrac{193 \cdot 27{,}6}{418}} =$ ....
14. $\sqrt{129 \cdot 6{,}45 \cdot 0{,}303} =$ ....
15. $\sqrt{88{,}5 \cdot 73{,}2 \cdot 2{,}7} =$ ....
16. $\sqrt{16{,}2 \cdot 5{,}17} \cdot 2{,}285 =$ ....
17. $\sqrt{46{,}7 \cdot 16{,}3} \cdot 1{,}405 =$ ....
18. $\sqrt{\dfrac{344}{57{,}6}} \cdot 10{,}7 =$ ....
19. $\sqrt{\dfrac{198}{7{,}15}} \cdot 9{,}04 =$ ....
20. $\sqrt{4{,}35 \cdot 13{,}4} : 32{,}6 =$ ....
21. $\dfrac{246}{\sqrt{36{,}4 \cdot 1{,}88}} =$ ....
22. $\sqrt{\dfrac{745}{16{,}9}} : 29{,}3 =$ ....

Ergebnisse: 1. 13,64; 2. 2,04; 3. 11,48; 4. 4,06; 5. 1,962; 6. 459; 7. 12,67; 8. 23,41; 9. 0,584; 10. 29,46; 11. 0,2603; 12. 9,135; 13. 3,57; 14. 15,88; 15. 132,25; 16. 20,91; 17. 38,76; 18. 26,15; 19. 47,57; 20. 0,2342; 21. 29,74; 22. 0,2266.

Weitere Übungen dieser Art finden Sie auf den Arbeitsblättern Nr. 9 und Nr. 11.

10.8 Kreis- und Zylinderberechnungen mit den Wurzelskalen

10.8.1 Durchmesser und Fläche eines Kreises

Die auf der Rückseite des Läufers angebrachten Strichmarken „d" und „q" ermöglichen ohne Zungenverschiebung die Berechnung von Kreisflächen bzw. -durchmessern mit der erhöhten Genauigkeit der Wurzelskalen.

Stellt man den Kreisdurchmesser mit der Marke „d" auf der Skala W_1 oder W_2 (bzw. W_1' oder W_2') ein, so steht unter der Marke „q" auf Skala D (bzw. C) die Kreisfläche.

Beispiele: 1. d = 0,718 mm; q = 0,405 mm²
2. d = 2,27 mm; q = 4,05 mm²

Bei der umgekehrten Rechenoperation findet man die Kreisfläche q je nach der Größenordnung des Durchmessers d entweder auf W_1 (bzw. W_1') oder auf W_2 (bzw. W_2'). Dabei gilt wieder die in Abschnitt 10.6 angegebene Regel.

Beispiele: 1. q = 1,84 cm²; d = 1,53 cm
2. q = 18,4 cm²; d = 4,84 cm

Übungen:

d	1,57 mm	3,08 cm	64,3 m			
q				6,85 cm²	28,6 mm²	490 cm²

Ergebnisse:

d				2,953 cm	6,035 mm	24,98 cm
q	1,935 mm²	7,45 cm²	3245 m²			

10.8.2 Berechnung von Kreiszylindern

Besonders vorteilhaft ist die Verwendung der Wurzelskalen bei Volumen- und Gewichts- (bzw. Massen-)berechnungen von Kreiszylindern.

1. Beispiel: Gesucht das Volumen V eines Kreiszylinders von d = 7,2 cm Durchmesser und l = 87 cm Länge.

Formel: $V = q \cdot l$

Einstellung: Marke „d" auf W_2 7,2
C 10 unter Marke „q" ziehen
C 87 | D: 3540

Ergebnis: V = 3540 cm³

2. Beispiel: Gesucht das Gewicht G einer Messingstange (spez. Gewicht γ = 8,4 p/cm³) von d = 2,4 cm Durchmesser und l = 1,60 m Länge.

Formel: $G = q \cdot l \cdot \gamma$

Die Multiplikation von q mit l wird mittels der Skala CI als Division durch den Kehrwert ausgeführt, so daß anschließend ohne nochmalige Zungenverschiebung mit γ multipliziert werden kann.

Einstellung: Marke „d" auf W_1 2,4
CI 1,6 unter Marke „q" ziehen
C 8,4 | D: 6080

Ergebnis: G = 6080 p = 6,08 kp

3. Beispiel: Wie lang muß ein Bleizylinder (γ = 11,35 p/cm³) von 5,8 cm Durchmesser sein, damit er 26 kp wiegt?

Verfahren: Man dividiert zunächst das Gewicht durch γ und erhält das Volumen. Daraus und aus dem bekannten Durchmesser ergibt sich die Länge.

Einstellung: D 26 | C 11,35
Marke „d" auf W_2 5,8
unter Marke „q" steht dann auf CI das
Ergebnis: l = 86,7 cm

Übungen:

d	5,20 m	1,6 mm	0,94 m	8,75 cm		24,6 cm
l	7,6 m	2600 m	38 cm		35 cm	1,55 m
γ in p/cm³	1	8,93	2,3	13,6	5,6	
G in kp				5,4	135	171

Ergebnisse:

d					29,6 cm	
l				6,6 cm		
γ in p/cm³						2,32
G in kp	161,4 · 10³	0,0467	607			

10.9 Weitere Anwendungen der Wurzelskalen

Zusammen mit den Skalen auf der Vorderseite des Novo-Duplex ermöglichen die Wurzelskalen eine Anzahl weiterer Rechenoperationen, so z. B. die Berechnung von x^4 durch den Übergang $W_{1,2}$ | A oder die Berechnung von $\sqrt[4]{x}$ durch den Übergang A | $W_{1,2}$.

Übungen:

Beschreiben Sie in der bekannten Kurzform, durch welchen Übergang die aufgeführten Rechenoperationen vorgenommen werden:

x^6	$\sqrt[4]{1-x^2}$	$\sqrt{\sin x}$	$\sqrt[6]{x}$	$\sqrt{\cot x}$	$\sqrt{\frac{1}{x}}$	$\sqrt{\frac{x}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{1}{\pi x}}$	arcsin x^2

πx^2	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{\pi x^2}$	$\sqrt{1-x^4}$

Ergebnisse: $W_{1,2}$ | K   P | $W_{1,2}$ S | $W_{1,2}$ K | $W_{1,2}$ $T_{1,2}$ rot | $W_{1,2}$ DI | $W_{1,2}$
CIF | $W'_{1,2}$ $W_{1,2}$ | S $W_{1,2}$ | DF $W_{1,2}$ | DI $W'_{1,2}$ | CIF $W_{1,2}$ | P

11. Die Mantissenskala L

arbeitet mit den Wurzelskalen zusammen, wie man auch an ihrer Kennzeichnung am rechten Skalenende erkennen kann: $^1/_2 \lg x$ ist nämlich gleichbedeutend mit $\lg \sqrt{x}$. Am bequemsten benutzt man die Mantissenskala zusammen mit den Skalen W_1' und W_2', da man dann nicht auf genaue Nullstellung der Zunge achten muß.
Beim Übergang von W_1' nach L gelten die links von den einzelnen Skalenmarken stehenden Beschriftungen, beim Übergang von W'_2 die rechts davon stehenden, die immer um 0,5 größer sind als die links stehenden.

Begründung: Es ist $\lg \sqrt{10\,x} = {}^1/_2 \lg 10\,x = {}^1/_2\,(\lg 10 + \lg x)$
$= {}^1/_2\,(1 + \lg x) = 0{,}5 + {}^1/_2 \lg x$

Beispiele: $\lg 2{,}5 = 0{,}398$; $\lg 7{,}91 = 0{,}898$

Zur Bildung des Logarithmus ist zu der Mantisse, die die Skala L liefert, noch die Kennziffer beizufügen, die sich nach folgendem Schema ergibt:

	Numerus	Kennziffer	
zwischen	1 und 10	0	Regel: Kennziffer =
„	10 und 100	1	Anzahl der Stellen vor
„	100 und 1000	2	dem Komma minus 1
	usw.		
zwischen	1 und 0,1	0, . . . –1	Regel: Kennziffer =
„	0,1 und 0,01	0, . . . –2	0, . . . minus Anzahl der
„	0,01 und 0,001	0, . . . –3	Nullen vor der ersten
	usw.		von Null verschiedenen
			Ziffer (einschließlich der
			Null vor dem Komma).

Beispiele: Numerus	Mantisse	Kennziffer	Logarithmus
1,875	.273	0	0,273
18,75	.273	1	1,273
187,5	.273	2	2,273
18 750 000	.273	7	7,273
0,1875	.273	0, . . . –1	0,273–1
0,018 75	.273	0, . . . –2	0,273–2
0,000 000 187 5	.273	0, . . . –7	0,273–7

Wenn der Logarithmus gegeben und der Numerus gesucht ist, findet man durch Umkehrung dieses Vorgangs aus der Mantisse die Ziffernfolge der Zahl (des Numerus), aus der Kennziffer die Kommastellung.

Beispiele: $\lg x = 2{,}197$; $x = 157{,}4$
$\lg y = 5{,}848$; $y = 705\,000$
$\lg z = 0{,}911{-}4$; $z = 0{,}000\,815$

Übungen:

a	3490		83 700		0,005 06		
lg a		4,723		0,001		0,091–3	–2,348
b	1,08		962		0,073		46,2
lg b		–,0586		1,03		0,08 –2	

Ergebnisse:

a		52 850		1,0025		0,001 233	0,004 487
lg a	3,5428		4,9227		0,7042–3		
b		0,2594		10,7		0,0631	
lg b	0,0334		2,9832		0,8633 –2		1,6646

12. Die Exponentialskalen LL

e^n

12.1 Beschreibung; Potenzen von e

Der Novo-Duplex 2/83 N hat auf der Rückseite zwei Skalengruppen von je vier Skalen für die Potenzen der Zahl $e = 2{,}71828\ldots$, und zwar

die Skalengruppe LL_0, LL_1, LL_2, LL_3 für positive Exponenten zwischen 0,001 und 11

und die Skalengruppe LL_{00}, LL_{01}, LL_{02}, LL_{03} für negative Exponenten zwischen −0,001 und −11.

Die Exponentialskalen arbeiten bei der Berechnung von e^n am sichersten mit der festen Skala D zusammen. **Dabei sind Veränderungen des auf den Skalen angegebenen Stellenwertes nicht zulässig.** Alles übrige wird durch die am rechten Skalenrand stehenden Bezeichnungen erklärt.

Beispiele:

	Übergang	Ergebnis
$e^{1,8}$	$D \mid LL_3$	6,05
e^8	$D \mid LL_3$	$2{,}98 \cdot 10^3$
$e^{0,54}$	$D \mid LL_2$	1,716
$e^{0,076}$	$D \mid LL_1$	1,079
$e^{-3,32}$	$D \mid LL_{03}$	0,0362
$e^{-0,1565}$	$D \mid LL_{02}$	0,8551
$e^{-0,0435}$	$D \mid LL_{01}$	0,9574
$e^{-0,0096}$	$D \mid LL_{00}$	0,99045

Die Skala LL_0 für $e^{0,001x}$ ist in die Skala D wie folgt eingearbeitet:
Für hinreichend kleine x gilt

$$e^{0,001x} \approx 1 + 0{,}001x$$

Man erhält also den gesuchten Wert $e^{0,001x}$, indem man vor die Zahl x ein „0,00" setzt und dazu 1 addiert. Beide Operationen werden gleichzeitig dadurch ausgeführt, daß man den Wert x auf Skala D aufsucht und dann die v o r der Normalbeschriftung der Skala stehenden Kursivziffern mitliest.

Beispiele: $e^{0,003} = 1{,}003$
$e^{0,00243} = 1{,}00243$

Bis $e^{0,003}$ beträgt die Abweichung des so gefundenen vom wirklichen Wert weniger als 0,000 005. Ab $e^{0,004}$ ist eine Korrektur der Abweichung dadurch möglich, daß man die h i n t e r der Normalbeschriftung stehenden Kursivziffern mitliest.

Beispiele: $e^{0,004} = 1{,}00401$
$e^{0,008} = 1{,}00803$

Mit der oben angegebenen Näherung

$$e^n \approx 1 + n \quad \text{(für hinreichend kleines } |n|\text{)}$$

können nötigenfalls auch die selten gebrauchten Werte zwischen $e^{-0,001}$ und $e^{0,001}$ mit hinreichender Genauigkeit berechnet werden.

Beispiele: $e^{0,000\,75} = 1{,}00075$
$e^{-0,000\,28} = 1 - 0{,}000\,28 = 0{,}999\,72$

Übungen hierzu finden Sie auf dem Arbeitsblatt Nr. 17.

Arbeitsblatt Nr. 17 Ergänzen Sie folgende Tabelle:

x	e^x	e^{-x}
2,24		
0,675		
0,143		
0,0306		
5,95		
0,094		
1,39		
0,003 72		
0,008 85		
0,000 64		
9,2		
7,9		

Ergebnisse:

x	e^x	e^{-x}
2,24	9,39	0,1065
0,675	1,964	0,509
0,143	1,1537	0,8668
0,0306	1,031 05	0,969 85
5,95	384	0,002 61
0,094	1,0986	0,9103
1,39	4,015	0,249
0,003 72	1,003 72	0,996 29
0,008 85	1,008 89	0,991 18
0,000 64	1,000 64	0,999 36
9,2	$9{,}9 \cdot 10^3$	0,000 10
7,9	$2{,}7 \cdot 10^3$	0,000 37

12.2 Die Hyperbelfunktionen

Aus den Potenzen von e ergeben sich nach einfachen Nebenrechnungen die Hyperbelfunktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Zur Berechnung setzt man den Läuferstrich auf D x, liest e^x und e^{-x} ab und berechnet die halbe Differenz bzw. Summe.

Für hinreichend große x (bei Rechenstabgenauigkeit für $x \geqq 3$) gilt

$$\sinh x \approx \cosh x \approx \frac{e^x}{2}$$

Beispiele:

x	0,003	0,03	0,3	3,0	6,0
e^x	1,003	1,030 45	1,350	20,1	405
e^{-x}	0,997	0,970 45	0,741	0,0498	0,002 48
sinh x	0,003	0,030 00	0,305	10,02	202
cosh x	1,000	1,000 45	1,045	10,07	202

Für $|x| \leqq 0{,}003$ gilt $\sinh x \approx x$ und $\cosh x \approx 1$.

Ferner ist

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \left(= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)$$

und

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \left(= \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \right)$$

Für die Berechnung der Funktionswerte mit dem Rechenstab eignen sich besonders die rechts stehenden Ausdrücke. (Die in Klammern stehenden Formeln sind zwar zur Berechnung bequemer, liefern aber beim Stabrechnen für größere Werte von x ungenauere Ergebnisse.)

Beispiele:

x	0,003	0,03	0,3	3
e^{-2x}	0,994 02	0,9418	0,549	0,002 48
tanh x	0,0030	0,029 99	0,2913	0,995
coth x	333,3	3,433	34,33	1,005

Für $x > 4$ gilt mit Rechenstabgenauigkeit $\tanh x = \coth x = 1$ und für $|x| \leqq 0{,}04$ $\tanh x = x$.

Arbeitsblatt Nr. 18

x	0,745	0,0196	3,94	0,002 82	0,000 805	−0,915
e^x						
e^{-x}						
sinh x						
cosh x						
e^{-2x}						
tanh x						
coth x						

Ergebnisse:

x	0,745	0,0196	3,94	0,002 82	0,000 805	−0,915
e^x	2,106	1,0198	51,5	1,002 82	1,000 805	0,400
e^{-x}	0,4745	0,9806	0,0194	0,997 18	0,999 195	2,497
sinh x	0,816	0,0196	25,7	1,000 00	1,000 000	−1,048
cosh x	1,291	1,0019	25,7	1,000 00	1,000 000	1,449
e^{-2x}	0,225	0,961 55	0,000 375	0,994 37	0,998 39	0,160
tanh x	0,632	0,0196	1,00	0,002 82	0,000 805	0,724
coth x	1,582	51,0	1,00	354,8	1242	1,382

12.3 Wurzeln aus e

$\boxed{\sqrt[n]{e}}$ $\boxed{\frac{1}{\sqrt[n]{e}}}$

Da Wurzeln Potenzen mit gebrochenen Hochzahlen sind, kann man mit den LL-Skalen auch beliebige Wurzeln aus e und deren Kehrwert berechnen. Die Rechnung kann mit einer einzigen Läufereinstellung durchgeführt werden, wenn man zur Berechnung des Kehrwerts des Wurzelexponenten die Kehrwertskala DI (auf der Vorderseite) benutzt.

Beispiele: $\sqrt[3]{e} = e^{1/3} = 1,396$ Einstellung: DI 3 | LL_2: 1,396

$\frac{1}{\sqrt[4,6]{e}} = e^{-\frac{1}{4,6}} = 0,845$ Einstellung: DI 4,6 | LL_{02}: 0,845

12.4 Natürliche Logarithmen

$\boxed{\ln a}$

Aus $y = e^x$ folgt umgekehrt $x = \ln y$

d. h.: ln y ist diejenige Zahl, mit der man e potenzieren muß, um y zu erhalten.

Daraus folgt, daß der Übergang von einer der LL-Skalen zur Skala D (unter Berücksichtigung des Stellenwertes) den natürlichen Logarithmus der auf LL eingestellten Zahl liefert.

Beispiele:	ln 12 = 2,485	Einstellung: LL_3 12 | D: 2,485
	ln 1,635 = 0,4915	LL_2 1,635 | D: 0,4915
	ln 1,015 = 0,014 89	LL_1 1,015 | D: 0,014 89
	ln 1,003 28 = 0,003 28	LL_0 1,003 28 | D: 0,003 28
	ln 0,998 12 = −0,001 88	LL_{00} 0,998 12 | D: −0,001 88
	ln 0,938 = −0,0640	LL_{01} 0,938 | D: −0,0640
	ln 0,626 = −0,4685	LL_{02} 0,626 | D: −0,4685
	ln 0,003 = −5,81	LL_{03} 0,003 | D: −5,81

Übungen:

a	1,643	0,947	32	0,991	1,028	0,773	1,001 49	0,002
ln a								

Ergebnisse:

0,4965; −0,054 45; 3,465; −0,009 04; 0,0276; −0,2575; 0,001 49; −6,215.

12.5 Potenzen beliebiger Zahlen

$\boxed{a^n}$

Zur Berechnung von a^n stellt man die Marke C 1 über bzw. unter die Zahl a auf einer der LL-Skalen. Für a > 1,001 findet man sie auf einer der schwarzen Skalen LL_0, LL_1, LL_2 oder LL_3, für a < 0,9991 steht sie auf einer der roten Skalen LL_{00}, LL_{01}, LL_{02} oder LL_{03}. Durch diese Einstellung C 1 | LL a wird die betreffende Skala zu einer Tabelle der Funktion a^x.

Stellt man also den Läuferstrich über eine Zahl x der Skala C, so steht auf der betreffenden LL-Skala unter dem Läuferstrich der Wert a^x.

Beispiele:	$3,1^{2,72} = 21,7$	Einstellung: LL_3 3,1 | C 1; C 2,72 | LL_3: 21,7
	$1,31^{3,48} = 2,53$	LL_2 1,31 | C 1; C 3,48 | LL_2: 2,53
	$1,0191^{5,35} = 1,1065$	LL_1 1,0191 | C 1; C 5,35 | LL_1: 1,1065
	$1,0013^{1,97} = 1,002\,56$	LL_0 1,0013 | C 1; C 1,97 | LL_0: 1,002 56
	$0,9976^{4,05} = 0,990\,32$	LL_{00} 0,9976 | C 1; C 4,05 | LL_{00}: 0,990 32
	$0,9632^{2,5} = 0,9105$	LL_{01} 0,9632 | C 1; C 2,5 | LL_{01}: 0,9105
	$0,8143^{3,22} = 0,5155$	LL_{02} 0,814 | C 1; C 3,22 | LL_{02}: 0,5155
	$0,2181^{1,65} = 0,081$	LL_{03} 0,218 | C 1; C 1,65 | LL_{03}: 0,081

Damit ist jedoch die Leistungsfähigkeit der LL-Skalen bei weitem nicht erschöpft. Wie schon erklärt, wird diejenige Skala, auf der die Basiszahl a eingestellt wurde, zur Skala a^x, einerlei, ob es sich um eine Skala der schwarzen oder der roten Skalengruppe handelt. Dementsprechend ändert sich dann auch die Bedeutung der übrigen Skalen nach folgendem Schema:

Die nächst äußere Skala wird zur Skala a^{10x}, die übernächste (falls vorhanden) zur Skala a^{100x} usw.

Die nächst innere Skala wird zur Skala $a^{0,1x}$, die übernächste zur Skala $a^{0,01x}$ usw. Analog dazu wird auch die Bedeutung der jeweils andersfarbigen Skalengruppe verändert. All das soll an zwei Beispielen näher erläutert werden:

1. Beispiel:

Zur Berechnung von $1,35^n$ wird C 1 über LL_2 1,35 gestellt. Damit wird diese Skala zusammen mit der verschobenen Skala C zu einer Tabelle der Funktion $1,35^x$. Die entsprechende Skala der roten Skalengruppe, also die Skala LL_{02}, wird zur Tabelle für $1,35^{-x}$.

Für die übrigen Skalen gilt folgendes Schema:

Skala:	ergibt zusammen mit Skala D:	ergibt zusammen mit der verschobenen Skala C:
LL_{03}	e^{-x}	$1,35^{-10x}$
LL_{02}	$e^{-0,1x}$	$1,35^{-x}$
LL_{01}	$e^{-0,01x}$	$1,35^{-0,1x}$
LL_{00}	$e^{-0,001x}$	$1,35^{-0,01x}$
LL_0	$e^{0,001x}$	$1,35^{0,01x}$
LL_1	$e^{0,01x}$	$1,35^{0,1x}$
LL_2	$e^{0,1x}$	$1,35^{x}$
LL_3	e^{x}	$1,35^{10x}$

2. Beispiel:

Zur Berechnung von $0{,}95^n$ wird C 1 unter LL_{01} 0,95 gestellt. Damit wird LL_{01} zur Tabelle $0{,}95^x$ und die ihr entsprechende Skala LL_1 zur Tabelle $0{,}95^{-x}$. Für die übrigen Skalen gilt:

Skala:	ergibt zusammen mit Skala D:	ergibt zusammen mit der verschobenen Skala C:
LL_{03}	e^{-x}	$0{,}95^{100x}$
LL_{02}	$e^{-0{,}1x}$	$0{,}95^{10x}$
LL_{01}	$e^{-0{,}01x}$	$0{,}95^{x}$
LL_{00}	$e^{-0{,}001x}$	$0{,}95^{0{,}1x}$
LL_0	$e^{0{,}001x}$	$0{,}95^{-0{,}1x}$
LL_1	$e^{0{,}01x}$	$0{,}95^{-x}$
LL_2	$e^{0{,}1x}$	$0{,}95^{-10x}$
LL_3	e^{x}	$0{,}95^{-100x}$

Wenn beim Rechnen mit den Exponentialskalen ein Durchschieben der Zunge nötig wird, wenn also die Basis a nicht mit der Marke C 1, sondern mit der Marke C 10 eingestellt werden muß, dann übernimmt diese Marke auch den Stellenwert von C 1, erhält also die Bedeutung „1" und die links von ihr stehenden Ziffern der Skala C bedeuten dann der Reihe nach 0,9; 0,8; usw. Den Wert von a^9 zum Beispiel findet man dementsprechend auf der nächst äußeren Skala.

Beispiele:		Einstellung:
1.	$2{,}1^{0{,}6} = 1{,}561$	LL_2 2,1 | C 10; C 6 | LL_2: 1,561
2.	$2{,}1^{6} = 85{,}8$	LL_2 2,1 | C 10; C 6 | LL_3: 85,8
3.	$2{,}1^{-4} = 0{,}0514$	LL_2 2,1 | C 10; C 4 | LL_{03}: 0,0514
4.	$0{,}45^{-7} = 268$	LL_{02} 0,45 | C 10; C 7 | LL_3: 268

Arbeitsblatt Nr. 19

1. $3{,}75^{2{,}6}$ = ...	15. $\frac{1}{0{,}000\,065^{0{,}7}}$ = ...
2. $3{,}75^{0{,}65}$ = ...	16. $170^{0{,}037}$ = ...
3. $3{,}75^{0{,}92}$ = ...	17. $62^{-0{,}084}$ = ...
4. $3{,}75^{-0{,}092}$ = ...	18. $0{,}000\,28^{0{,}012}$ = ...
5. $0{,}65^{22}$ = ...	19. $0{,}9485^{-0{,}64}$ = ...
6. $0{,}657^{,5}$ = ...	20. $0{,}997\,82^{23}$ = ...
7. $0{,}65^{-0{,}4}$ = ...	21. $2600^{0{,}25}$ = ...
8. $1{,}36^{0{,}85}$ = ...	22. $13\,500^{-0{,}18}$ = ...
9. $1{,}08^{-30}$ = ...	23. $0{,}000\,46^{0{,}059}$ = ...
10. $1{,}0028^{138}$ = ...	24. $(6 \cdot 10^{-5})^{-0{,}075}$ = ...
11. $0{,}0032^{1{,}3}$ = ...	25. $0{,}847^{-9}$ = ...
12. $0{,}102^{-0{,}05}$ = ...	26. $(1/e)^{3{,}9}$ = ...
13. $1{,}0165^{0{,}085}$ = ...	27. $1{,}0037^{2}$ = ...
14. $\frac{1}{27{,}5^{1{,}35}}$ = ...	28. $1{,}045^{200}$ = ...

Ergebnisse: 1. 31,1; 2. 2,361; 3. 3,37; 4. 0,8855; 5. $7{,}65 \cdot 10^{-5}$; 6. 0,0395; 7. 1,188; 8. 1,2985; 9. 0,0994; 10. 1,471; 11. $5{,}7 \cdot 10^{-4}$; 12. 1,121; 13. 1,001 39; 14. 0,0114; 15. 850; 16. 1,209; 17. 0,707; 18. 0,9065; 19. 1,0344; 20. 0,9509; 21. 7,14; 22. 0,1805; 23. 0,6355; 24. 2,073; 25. 4,46; 26. 0,0202; 27. 1,0074; 28. $6{,}7 \cdot 10^{3}$.

12.6 Wurzeln beliebiger Zahlen $\sqrt[n]{a}$

1. Verfahren

Gemäß der Beziehung $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ faßt man die Wurzel als Potenz mit gebrochener Hochzahl auf und verfährt dann nach 12.5. Den Kehrwert 1/n erhält man einfach, indem man n auf der Reziprokskala CI einstellt.

Beispiele:

1. $\sqrt[3{,}5]{40} = 2{,}87$ — Einstellung: LL_3 40 | C 10; CI 3,5 | LL_3: 2,87
2. $\sqrt[7]{1{,}24} = 1{,}0312$ — LL_2 1,24 | C 1; CI 7 | LL_1: 1,0312
3. $\sqrt[2{,}8]{0{,}004} = 0{,}139$ — LL_{03} 0,004 | C 10; CI 2,8 | LL_{03}: 0,139
4. $\dfrac{1}{\sqrt[6{,}3]{2{,}35}} = 2{,}35^{-\frac{1}{6{,}3}} = 0{,}873$ — LL_2 2,35 | C 10; CI 6,3 | LL_{02}: 0,873

2. Verfahren

Aus $\sqrt[n]{a} = b$ folgt $b^n = a$. Gesucht wird diejenige Zahl b, deren n-Potenz a ergibt.

Beispiele:

1. $\sqrt[3{,}2]{35} = 3{,}04$ — Einstellung: LL_3 35 | C 3,2; C 1 | LL_3: 3,04
2. $\sqrt[6]{9{,}4} = 1{,}453$ — LL_3 9,4 | C 6; C 10 | LL_2: 1,453
3. $\sqrt[0{,}45]{0{,}724} = 0{,}488$ — LL_{02} 0,724 | C 0,45; C 10 | LL_{02}: 0,488
4. $\dfrac{1}{\sqrt[3{,}8]{15{,}5}} = 0{,}486$ — LL_3 15,5 | C 3,8; C 10 | LL_{02}: 0,486

Übungen:

1. $\sqrt[7{,}5]{420} =$ ....
2. $\sqrt[1{,}26]{1{,}074} =$ ....
3. $\sqrt[2{,}6]{1{,}19} =$ ....
4. $\sqrt[0{,}073]{1{,}0032} =$ ....
5. $\sqrt[1{,}6]{0{,}9982} =$ ....
6. $\sqrt[5{,}8]{0{,}954} =$ ....
7. $\sqrt[25]{0{,}79} =$ ....
8. $\sqrt[18]{0{,}034} =$ ....
9. $\sqrt[6{,}9]{4 \cdot 10^{-5}} =$ ....
10. $\sqrt[0{,}43]{0{,}582} =$ ....
11. $\dfrac{1}{\sqrt[3{,}8]{9{,}4}} =$ ....
12. $\dfrac{1}{\sqrt[9{,}3]{0{,}971}} =$ ....

Ergebnisse: 1. 2,238; 2. 1,0583; 3. 1,0692; 4. 1,0448; 5. 0,998 874; 6. 0,9919; 7. 0,990 61; 8. 0,8287; 9. 0,23; 10. 0,284; 11. 0,554; 12. 1,003 17.

12.7 Logarithmen mit beliebiger Basis $\log_b a$

Aus $b^n = a$ folgt $n = \log_b a$.

Der ${}^b\log a$ ist also diejenige Zahl, mit der man b potenzieren muß, um a zu erhalten. Daraus ergibt sich eine einfache Methode zur Berechnung von Logarithmen mit beliebiger Basis mittels der Exponentialskalen.

Beispiele:

1. $\log_3 26 = 2{,}965$ — Einstellung: LL_3 3 | C 1; LL_3 26 | C: 2,965
2. $\log_{2,5} 1{,}3 = 0{,}2865$ — LL_2 2,5 | C 10; LL_2 1,3 | C: 0,2865
3. $\log_{1,7} 0{,}85 = -0{,}306$ — LL_2 1,7 | C 10; LL_{02} 0,85 | C: −0,306
4. $\log_{0,6} 8 = -4{,}07$ — LL_{02} 0,6 | C 10; LL_3 8 | C: −4,07

Übungen:

1. $\log_{3,5} 120 =$ ....
2. $\log_{1,2} 52 =$ ....
3. $\log_{1,08} 6{,}8 =$ ....
4. $\log_{1,002} 2400 =$ ....
5. $\log_{30} 4{,}5 =$ ....
6. $\log_{9,5} 1{,}04 =$ ....
7. $\log_{1,85} 0{,}54 =$ ....
8. $\log_{0,7} 1{,}95 =$ ....

Ergebnisse: 1. 3,82; 2. 21,65; 3. 24,9; 4. 3895; 5. 0,442; 6. 0,0174; 7. −1,001; 8. −1,872.

12.8 Dekadische Logarithmen $\lg a$

Das in 12.7 beschriebene Verfahren kann selbstverständlich auch zur Ermittlung dekadischer Logarithmen (Logarithmen zur Basis 10) verwendet werden. Es bietet gegenüber der in Abschnitt 11 erklärten Methode den Vorteil, daß es nicht nur die Mantisse, sondern gleichzeitig auch die Kennziffer liefert. Zudem ist das Verfahren (u. U. wesentlich) genauer, wenn der Numerus zwischen 1/e (= 0,368) und e (= 2,718) liegt, oder anders ausgedrückt: wenn der Numerus auf einer der Skalen LL_{02}, LL_{01}, LL_{00}, LL_0, LL_1, LL_2 zu finden ist (das sind alle Exponentialskalen außer der obersten und der untersten).

Beispiele:

1. $\lg 1{,}94 = 0{,}288$
2. $\lg 1{,}0515 = 0{,}0218$
3. $\lg 0{,}9526 = -0{,}0211$
4. $\lg 0{,}462 = -0{,}335$

Der Vorteil der größeren Genauigkeit kann übrigens auch auf alle die Zahlen ausgedehnt werden, deren Ziffernfolgen (ohne Rücksicht auf den Stellenwert) auf den sechs genannten Skalen zu finden sind, d. h. deren Ziffernfolgen zwischen 1-0-0-1 und 2-7-1-8 oder zwischen 3-6-8 und 9-9-9-1 liegen, wobei man allerdings die Kennziffer selbst bestimmen muß.

Beispiele:

1. Gesucht lg 1058,5. Der gesuchte Logarithmus hat dieselbe Mantisse wie lg 1,0585, nur ist seine Kennziffer um 3 größer. Man findet lg 1,0585 = 0,0247 und daraus lg 1058,5 = 3,0247.
2. Gesucht lg 236. Es ist lg 2,36 = 0,373 und somit lg 236 = 2,373.
3. Gesucht lg 694. Es ist lg 0,649 = −0,1586 und lg 694 = lg 0,694 + 3 = 2,8414.
4. Gesucht lg 9928,5. Es ist lg 0,992 85 = −0,003 115
   und lg 9928,5 = −0,003 115 + 4 = 3,996 885.

Es kann so in günstigen Fällen die Genauigkeit einer fünf- oder gar sechsstelligen Tafel erreicht werden.

Übungen:

1. lg 19,7 = ...	4. lg 67 = ...
2. lg 102,4 = ...	5. lg 9235 = ...
3. lg 1570 = ...	6. lg 998,37 = ...

Ergebnisse: 1. 1,2945; 2. 2,010 30; 3. 3,1959; 4. 1,8261; 5. 3,9654; 6. 2,999 291.

12.9 Zweierlogarithmen

Ib a

Da der linke und der rechte Randstrich auf der Läuferrückseite den gleichen Abstand voneinander haben wie die Marke 2 und die Marke e der Skala LL_2, kann mit diesen beiden Läuferstrichen sehr schnell der Zweierlogarithmus einer Zahl ermittelt werden: Man stellt den linken Randstrich über den Numerus auf einer der LL-Skalen und kann dann unter dem rechten Randstrich auf Skala D sofort den Zweierlogarithmus ablesen.

Beispiele:

1. lb 8 = 3 — Einstellung: linker Randstrich auf LL_3 8
   unter rechtem Randstrich auf D: 3
2. lb 1,48 = 0,566 — linker Randstrich auf LL_2 1,48
   unter rechtem Randstrich auf D: 0,566
3. lb 0,638 = −0,648 — linker Randstrich auf LL_{02} 0,638
   unter rechtem Randstrich auf D: −0,648

12.10 Herstellung logarithmischer Leitern beliebigen Maßstabs

1. Beispiel: Zur Herstellung eines Diagramms soll eine Strecke von 9 cm Länge logarithmisch von 1 bis 15 unterteilt werden. Der Anfangspunkt der Strecke soll also log 1 = 0 entsprechen, der Endpunkt log 15. Da die Logarithmen verschiedener Systeme zueinander proportional sind, ist die Teilung vom gewählten System unabhängig; wir wählen daher das bequemste, nämlich das System der natürlichen Logarithmen.

Ansatz: ln 15 ≙ 9 cm,

$$\frac{\ln 15}{9\ \text{cm}} = \frac{\ln a}{x\ \text{cm}}$$

Dabei ist x cm der Abstand des Teilpunkts a vom Anfang der gegebenen Strecke.

Einstellung: LL_3 15 | C 9
LL a | C: x

Mit dieser Einstellung findet man (evtl. nach Durchschieben der Zunge):

Teilpunkt a	1	2	3	4	5	6	7	8
x	0	2,3	3,65	4,61	5,35	5,95	6,46	6,91

Teilpunkt a	9	10	11	12	13	14	15
x	7,3	7,65	7,97	8,26	8,52	8,77	9

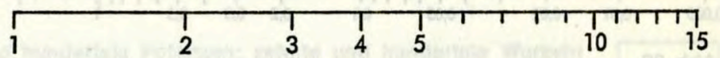


Abb. 30

2. Beispiel: Eine Strecke von 16 cm Länge soll logarithmisch von 0,005 bis 10 unterteilt werden.
Hier erstreckt sich die Teilung vom Nullpunkt (ln 1 = 0) nach rechts bis ln 10 = 2,3 und nach links bis ln 0,005 = −5,29.
Die Summe dieser beiden Beträge, also 2,3 + 5,29 = 7,59, entspricht der Strecke s = 16 cm. Aus dem Verhältnis $\frac{7,59}{16\ \text{cm}}$ ergibt sich der Abstand des Nullpunkts (Teilpunkt 1)

vom linken Rand: $5,29 \cdot \frac{16\ \text{cm}}{7,59} = 11,15$ cm und

vom rechten Rand: $2,3 \cdot \frac{16\ \text{cm}}{7,59} = 4,85$ cm (Kontrolle: 11,15 + 4,85 = 16).

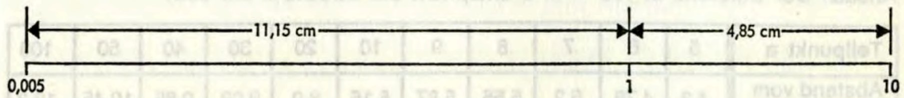


Abb. 31

Nunmehr werden die Abstände der einzelnen Teilpunkte vom Teilpunkt 1 berechnet:

Einstellung: LL_3 10 | C 4,85
LL a | C: x

liefert:

Teilpunkt a	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1,46	2,31	2,92	3,39	3,77	4,1	4,38	4,53	4,85

Einstellung: LL_{03} 0,005 | C 11,15
LL a | C: x

ergibt:

Teilpunkt a	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,2
−x	11,15	9,69	8,23	7,38	6,77	6,3	4,85	3,38

Teilpunkt a	0,3	0,4	0,5
−x	2,53	1,93	1,46

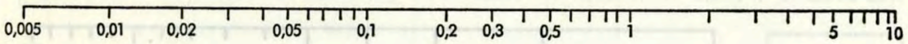


Abb. 32

Im Grunde würde es genügen, nur eine Dekade (etwa die von 1 bis 10) zu berechnen und die übrigen dann mit dem Stechzirkel gleichartig zu unterteilen. (Dies ist in Abb. 32 geschehen für die Bereiche zwischen 0,05 und 0,1 und zwischen 0,5 und 1).

Ü b u n g : Eine Strecke von 8 cm Länge soll logarithmisch von 5 bis 100 unterteilt werden.

Teilpunkt a	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	100
Abstand vom Teilpunkt 1											

E r g e b n i s :

Ansatz: Der Differenz ln 100 − ln 5 entspricht die Strecke 8 cm usw.

Teilpunkt a	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	100
Abstand vom Teilpunkt 1	4,3	4,78	5,2	5,55	5,87	6,15	8,0	9,09	9,85	10,45	12,3

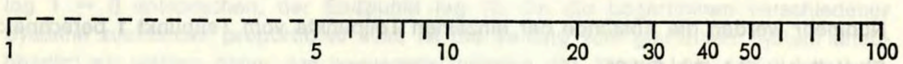


Abb. 33

12.11 Kehrwertbildung

Die Exponentialskalen eignen sich vorzüglich zur bequemen Berechnung von Kehrwerten, weil sie – im Gegensatz zu den Reziprokskalen – den richtigen Stellenwert mitliefern. Und zwar erfolgt die Kehrwertberechnung einfach durch Übergang von einer LL-Skala zur entsprechenden Skala der anderen Skalengruppe, also z. B. von LL_2 zu LL_{02} oder von LL_{03} zu LL_3 usw.

Beispiele: 1. 1/23,5 = 0,0426 Einstellung: LL_3 23,5 | LL_{03}: 0,0426
2. 1/0,9435 = 1,0599 LL_{01} 0,9435 | LL_1: 1,0599

Hinsichtlich der Genauigkeit gilt auch hier das in 12.8 Gesagte: Das Verfahren ist (unter Umständen erheblich) genauer als die Benutzung der Reziprokskalen, wenn die betreffende Zahl nicht gerade auf einer der äußeren Skalen (LL_3 und LL_{03}) liegt.

Übungen:

a	34	1,252	1,068	0,9966	0,0022	1002,14	107,4
1/a							

Ergebnisse: 0,0294; 0,7985; 0,9396; 0,001 481; 450; 0,997 86; 0,009 311.

12.12 Zehnte und hundertste Potenzen; zehnte und hundertste Wurzeln

$$a^{10} \quad a^{100} \quad \sqrt[10]{a} \quad \sqrt[100]{a}$$

Beim Übergang von einer Exponentialskala zur nächst äußeren wird die eingestellte Zahl mit zehn potenziert, beim Übergang zur übernächsten Skala mit hundert usf.

Durch die umgekehrte Operation erhält man entsprechend die zehnte bzw. die hundertste Wurzel.

Beispiele: 1. $1{,}02^{10} = 1{,}219$ Einstellung: LL_1 1,02 | LL_2: 1,219
2. $\sqrt[10]{0{,}029} = 0{,}702$ LL_{03} 0,029 | LL_{02}: 0,702

13. Umformen komplexer Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = a + j\,b$ (Normalform oder algebraische Form) kann bekanntlich auch wie folgt dargestellt werden:

$z = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ trigonometrische Form

$z = r\,e^{j\varphi}$ Exponentialform

und $z = r\,/\underline{\varphi}$ Vektorform

Für die vorkommenden Größen gelten folgende Bezeichnungen:

a = Realteil, jb = Imaginärteil, r = Betrag und φ = Argument der komplexen Zahl z.

Zwischen ihnen bestehen die Beziehungen:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{b}{a}$$
$$a = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad b = r\sin\varphi$$

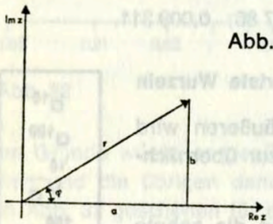


Abb. 34

Da für Additionen und Subtraktionen komplexer Zahlen die Normalform am günstigsten ist, für alle anderen Rechenoperationen aber die Vektorform (oder die gleichwertige Exponentialform), sind beim Rechnen mit komplexen Zahlen häufig Umformungen nötig. Sie lassen sich jeweils mit nur einer Schieberbewegung durchführen.

1. Umformung von der Normalform $a + j\,b$ in die Vektorform $r/\underline{\varphi}$.

Zur Berechnung von φ aus a und b benutzt man die Beziehung $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ und ersetzt die Division b/a durch eine Multiplikation mit dem Kehrwert: $\tan\varphi = b\cdot\frac{1}{a}\cdot$

Aus dem Winkel φ und der Beziehung $\sin\varphi = \frac{b}{r} = b\cdot\frac{1}{r}$ findet man dann nur mit einer Läuferbewegung r.

Einstellung: D b | CI 10 (CI 1)

CI a | T: $\varphi \begin{cases} T_1 \text{ wenn } \frac{b}{a} < 1 \\ T_2 \text{ wenn } \frac{b}{a} > 1 \end{cases}$

S φ | CI: r

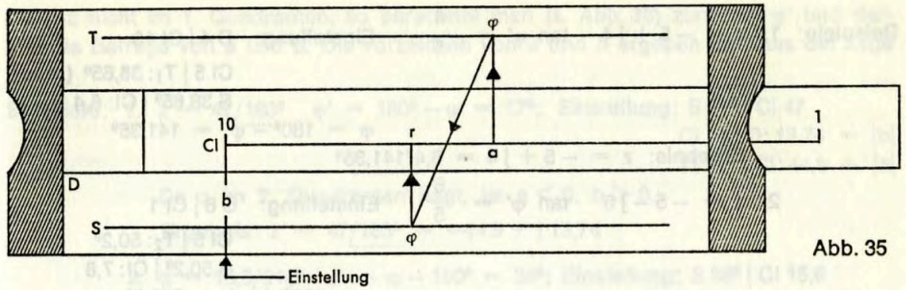


Abb. 35

Beispiele: 1. $z = 23 + j\,18$ Einstellung: D 18 | CI 10
CI 23 | T_1: 38,05°
S 38,05° | CI: 29,2

Ergebnis: $z = 23 + j\,18 = 29{,}2/\underline{38{,}05^0}$

2. $z = 16 + j\,24$ Einstellung: D 24 | CI 1
CI 16 | T_2: 56,3°
S 56,3° | CI: 28,8

Ergebnis: $z = 16 + j\,24 = 28{,}8/\underline{56{,}3^0}$

Dabei wurde zunächst vorausgesetzt, daß a und b beide positiv sind, die Zahl z also im 1. Quadranten der Gaußschen Ebene liegt. Ist dies nicht der Fall, so rechnet man mit den Absolutwerten von a und b und bestimmt auf die beschriebene Weise zunächst den Winkel $\varphi' = \arctan\frac{|b|}{|a|}$, woraus sich dann, je nach Lage von z, das Argument φ ergibt:

Abb. 36.1 z im 2. Quadranten
$a < 0;\ b > 0$
$\varphi = 180^0 - \varphi'$

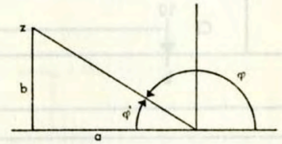


Abb. 36.2 z im 3. Quadranten
$a < 0;\ b < 0$
$\varphi = 180^0 + \varphi'$

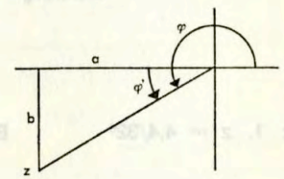
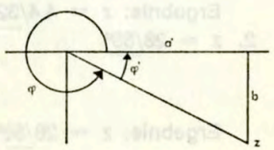


Abb. 36.3 z im 4. Quadranten
$a > 0;\ b < 0$
$\varphi = 360^0 - \varphi'$



Beispiele: 1. $z = -5 + j\,4$ $\quad \tan\varphi' = \frac{4}{5}$ $\quad$ Einstellung: D 4 | Cl 10

Cl 5 | T_1: 38,65° (= φ')

S 38,65° | Cl: 6,4

$\varphi = 180^\circ - \varphi' = 141{,}35^\circ$

Ergebnis: $z = -5 + j\,4 = 6{,}4/\underline{141{,}35^\circ}$

2. $z = -5 - j\,6$ $\quad \tan\varphi' = \frac{6}{5}$ $\quad$ Einstellung: D 6 | Cl 1

Cl 5 | T_2: 50,2°

S 50,2° | Cl: 7,8

$\varphi = 180^\circ + \varphi' = 230{,}2^\circ$

Ergebnis: $z = -5 - j\,6 = 7{,}8/\underline{230{,}2^\circ}$

Übungen:

$z_1 = 7 - j\,13 =$ .... $\quad z_3 = -34 - j\,29 =$ ....

$z_2 = -5{,}6 + j\,3{,}8 =$ .... $\quad z_4 = 19 + j\,25{,}4 =$ ....

Ergebnisse: $z_1 = 14{,}76/\underline{298{,}3^\circ}$; $z_2 = 6{,}77/\underline{145{,}85^\circ}$; $z_3 = 44{,}7/\underline{220{,}5^\circ}$; $z_4 = 31{,}7/\underline{53{,}2^\circ}$.

2. Umformung von der Vektorform $r/\underline{\varphi}$ in die Normalform $a + j\,b$.

Diese Umformung geschieht durch Umkehrung des oben beschriebenen Verfahrens:

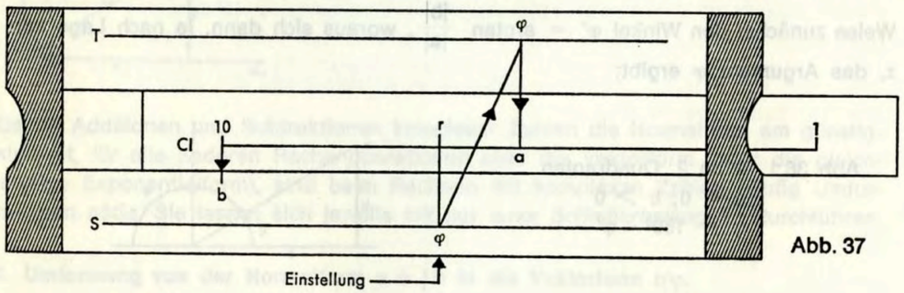


Abb. 37

Einstellung: S φ | Cl r

Cl 10 (Cl 1) | D: b

T φ | Cl: a

Beispiele: 1. $z = 4{,}4/\underline{32^\circ}$ $\quad$ Einstellung: S 32° | Cl 4,4

Cl 10 | D: 2,33 = b

T_1 32° | Cl: 3,73 = a

Ergebnis: $z = 4{,}4/\underline{32^\circ} = 3{,}73 + j\,2{,}33$

2. $z = 26/\underline{59^\circ}$ $\quad$ Einstellung: S 59° | Cl 26

Cl 10 | D: 22,3 = b

Nach Durchschieben: T_2 59° | Cl: 13,4 = a

Ergebnis: $z = 26/\underline{59^\circ} = 13{,}4 + j\,22{,}3$

Liegt z nicht im 1. Quadranten, so berechnet man (s. Abb. 36) zunächst φ' und daraus die Beträge von a und b. Die Vorzeichen von a und b ergeben sich aus der Lage von z.

Beispiele: 1. $z = 47/\underline{163^\circ}$ $\quad \varphi' = 180^\circ - \varphi = 17^\circ$; Einstellung: S 17° | Cl 47

Cl 10 | D: 13,74 = |b|

T_1 17° | Cl: 44,9 = |a|

Da z im 2. Quadranten liegt, ist $a < 0$, $b > 0$.

Ergebnis: $z = 47/\underline{163^\circ} = -44{,}9 + j\,13{,}74$

2. $z = 15{,}6/\underline{218^\circ}$ $\quad \varphi' = \varphi - 180^\circ = 38^\circ$; Einstellung: S 38° | Cl 15,6

Cl 1 | D: 9,60 = |b|

T_1 38° | Cl: 12,29 = |a|

Da z im 3. Quadranten liegt, ist $a < 0$, $b < 0$.

Ergebnis: $z = 15{,}6/\underline{218^\circ} = -12{,}29 - j\,9{,}60$

Übungen: $z_1 = 27{,}4/\underline{64^\circ} =$ .... $\quad z_3 = 32/\underline{229^\circ} =$ ....

$z_2 = 9{,}3/\underline{112^\circ} =$ .... $\quad z_4 = 56/\underline{286^\circ} =$ ....

Ergebnisse: $z_1 = 12{,}01 + j\,24{,}65$; $z_2 = -3{,}485 + j\,8{,}625$; $z_3 = -21 - j\,24{,}15$; $z_4 = 53{,}8 - j\,15{,}43$.

14. Die Sonderskalen des CASTELL-DUPLEX

14.1 Die Skala BI

Die reziproke Quadratskala BI erlaubt die vereinfachte Berechnung von Ausdrücken wie $a\sqrt{b}$ (ohne Durchschieben), $\sqrt{a \cdot b \cdot c}$ und anderer zusammengesetzter Ausdrücke mit Wurzeln und Quadraten, wie sie besonders in der Bautechnik auftreten.

Beispiele:

1. $4{,}1\sqrt{39}\ \left(= 4{,}1 : \frac{1}{\sqrt{39}}\right)$ Einstellung: D 4,1 | BI 39
   C 1 | D: 25,6

2. $\sqrt{2{,}85 \cdot 7{,}4 \cdot 53}\ \left(= \sqrt{2{,}85 : \frac{1}{7{,}4} \cdot 53}\right)$ Einstellung: A 2,85 | BI 7,4
   B 53 | D: 33,4

3. $1{,}95 \cdot \sqrt{62} \cdot \sqrt{14{,}5}\ \left(= 1{,}95 : \frac{1}{\sqrt{62}} \cdot \sqrt{14{,}5}\right)$ Einstellung: D 1,95 | BI 62
   B 14,5 | D: 58,5

4. $\frac{1}{(1{,}4 \cdot 4{,}8)^2}$ Einstellung: D 1 | C 1,4 (Multiplikation mit vertauschten Skalen)
   D 4,8 | BI: 0,022 15

5. $\frac{2{,}92^2}{16{,}4 \cdot 0{,}36}\ \left(= \frac{2{,}92^2}{16{,}4} \cdot \frac{1}{0{,}36}\right)$ Einstellung: D 2,92 | B 16,4
   BI 0,36 | A: 1,445

6. $56 \cdot 2{,}8 \cdot 0{,}47^2\ \left(= 56 : \frac{1}{2{,}8} \cdot 0{,}47^2\right)$ Einstellung: A 56 | BI 2,8
   C 0,47 | A: 34,6

7. Tabelle der Funktion $\frac{21{,}2}{\sqrt{x}}$ Einstellung: D 21,2 | C 1
   BI x | D: $\frac{21{,}2}{\sqrt{x}}$

x	1,2	4	7	12	82	850	2400
$\frac{21{,}2}{\sqrt{x}}$	19,35	10,6	8,01	6,12	2,34	0,727	0,433

Übungen hierzu finden Sie auf Arbeitsblatt 16 (Seite 82).

14.2 Die Skala K'

Die bewegliche Kubenskala K' erlaubt zusammen mit Skala K die Berechnung von zusammengesetzten Ausdrücken mit 3. Potenzen und Kubikwurzeln von der Form

$$\frac{a^3}{b},\ \frac{a \cdot b^3}{c};\ \frac{a \cdot b}{c^3};\ \sqrt[3]{a \cdot b};\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\ \text{usw.}$$

Dabei wird mit dem Skalenpaar K/K' genau so multipliziert und dividiert wie mit den Skalenpaaren A/B und C/D, allerdings mit verminderter Genauigkeit.

Beispiele:

1. $\frac{4{,}85^3}{62} = 1{,}84;$ Einstellung: D 4,85 | K' 62
   K' 1 | K: 1,84

2. $\frac{305 \cdot 1{,}86^3}{245} = 8{,}0;$ Einstellung: K 305 | K' 245
   C 1,86 | K: 8,0

3. $\frac{78 \cdot 46}{5{,}2^3} = 25{,}5;$ Einstellung: K 78 | C 5,2
   K' 46 | K: 25,5

4. $\sqrt[3]{16{,}2 \cdot 510} = 20{,}2;$ Einstellung: K 16,2 | K' 1000
   K' 510 | D: 20,2

Wie immer beim Radizieren, ist auch hier darauf zu achten, daß der Radikand in der richtigen Dekade der Kubenskala eingestellt wird. Damit bei dieser Aufgabe der Radikand (16,2 · 510) sofort in der richtigen Dekade erscheint, müssen die beiden Faktoren jeweils in der stellenwertrichtigen Dekade eingestellt werden, 16,2 also in der zweiten Dekade, 510 in der dritten. Außerdem darf zur Einstellung der Zunge auf den ersten Faktor nur die Marke K' 1 oder K' 1000, nicht aber K' 100 benutzt werden.

Liegt ein Faktor nicht zwischen 1 und 1000, so muß wieder eine geeignete Zehnerpotenz abgespalten werden.

5. $\sqrt[3]{0{,}072 \cdot 1800} = \sqrt[3]{72 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}8 \cdot 10^3} = \sqrt[3]{72 \cdot 1{,}8} = 5{,}06$
   Einstellung: K 72 | K' 1
   K' 18 | D: 5,06

6. $\sqrt[3]{\frac{48{,}5}{126}} = 0{,}7275;$ Einstellung: K 48,5 | K' 126
   K' 1000 | D: 0,7275

7. $\frac{\left(\frac{7{,}4}{13{,}6}\right)^{2/3}}{0{,}375} = 1{,}78;$ Einstellung: K 7,4 | K' 13,6
   K' 1000 | (A: 0,666) | B 0,375
   B 1 | A: 1,78

8. $\frac{\left(\frac{57}{8{,}3}\right)^{2/3} \cdot 48{,}5}{2{,}9} = 60{,}4;$ Einstellung: K 57 | K' 8,3
   K' 1 | (A: 3,61) | B 2,9
   B 48,5 | A: 60,4

9. $\left(\frac{19{,}4}{61}\right)^{3/2} \cdot 235 = 42{,}1;$ Einstellung: A 19,4 | B 61
   K' 235 | K: 42,1

10. $\frac{2{,}62^4}{1{,}86^3} = \frac{2{,}62^3 \cdot 2{,}62}{1{,}86^3} = 7{,}32;$ Einstellung: D 2,62 | C 1,86
    K' 2,62 | K: 7,32

Übungen hierzu finden Sie auf dem Arbeitsblatt Nr. 20, Aufgabe 1-12.

14.3 Die Skala S'

Die bewegliche Sinusskala S' vereinfacht die Berechnung von Produkten und Quotienten aus trigonometrischen Funktionen, wenn wenigstens eine der beteiligten Funktionen eine Sinus- oder Kosinusfunktion ist.

Beispiele:

1. $\sin 54{,}5^\circ \cdot \sin 18{,}3^\circ = 0{,}2555$; Einstellung: S 54,5° | C 10
   S' 18,3° | D: 0,2555
2. $\sin 9{,}6^\circ \cdot \sin 63{,}2^\circ = 0{,}0752$; Einstellung: S 9,6° | C 1
   S' (rot) 63,2° | D: 0,0752
3. $\sin 2{,}6^\circ \cdot \sin 38^\circ = 0{,}0279$; Einstellung: ST 2,6° | C 10
   S' 38° | D: 0,0279
4. $\sin 21^\circ \cdot \tan 34{,}2^\circ = 0{,}244$; Einstellung: T_1 34,2° | C 10
   S' 21° | D: 0,244
5. $\tan 68{,}5^\circ \cdot \cos 55^\circ = 1{,}456$; Einstellung: T_2 68,5° | C 10
   S' (rot) 55° | D: 1,456
6. $\sin 14{,}5^\circ : \sin 43^\circ = 0{,}367$; Einstellung: S 14,5° | S' 43°
   C 10 | D: 0,367
7. $\tan 54^\circ : \sin 28^\circ = 2{,}93$; Einstellung: T_2 54° | S' 28°
   C 10 | D: 2,93
8. $\sin 33^\circ : \tan 23^\circ = 1{,}283$; Einstellung: T_1 23° | S' 33°
   D 1 | C: 1,283
9. $\dfrac{\sin 4{,}1^\circ \cdot \cos 79{,}6^\circ}{\sin 36^\circ} = 0{,}021\,95$; Einstellung: ST 4,1° | S' 36°
   S' (rot) 79,6° | D: 0,021 95
10. $\dfrac{\tan 26{,}5^\circ \cdot \cos 39^\circ}{\cos 62^\circ} = 0{,}825$; Einstellung: T_1 26,5° | S' (rot) 62°
    S' (rot) 39° | D: 0,825
11. $\sin^2 63^\circ \cdot \cos^2 71^\circ = 0{,}0841$; Einstellung: S 63° | C 10
    S' (rot) 71° | A: 0,0841
12. $\dfrac{\cot^2 11^\circ}{\sin^2 38^\circ} = 69{,}8$; Einstellung: T_2 (rot) 11° | S' 38°
    B 100 | A: 69,8

Bearbeiten Sie nun die restlichen Aufgaben des Arbeitsblattes Nr. 20.

Arbeitsblatt Nr. 20

1. $\dfrac{0{,}041^3}{18{,}2} =$ ....
2. $\dfrac{52{,}5^3}{26\,000} =$ ....
3. $\dfrac{17{,}9^3 \cdot 7{,}6}{480} =$ ....
4. $\dfrac{0{,}23 \cdot 11{,}5^3}{2850} =$ ....
5. $\dfrac{335 \cdot 760}{61^3} =$ ....
6. $\dfrac{8{,}2^3 \cdot 0{,}76}{4{,}4^3} =$ ....
7. $\dfrac{12{,}4^3 \cdot 0{,}62^3}{1420} =$ ....
8. $\dfrac{14{,}2}{2{,}94^3 \cdot 1{,}67^3} =$ ....
9. $\sqrt[3]{19{,}6 \cdot 0{,}65} =$ ....
10. $\sqrt[3]{\dfrac{128 \cdot 21{,}5}{3{,}6}} =$ ....
11. $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}46 \cdot 630}{5{,}7}} =$ ....
12. $\sqrt[3]{\dfrac{2900 \cdot 31\,000}{0{,}048}} =$ ....
13. $\sqrt[3]{92} \cdot \sin 30{,}4^\circ =$ ....
14. $\dfrac{\sqrt[3]{255}}{\cos 72^\circ} =$ ....
15. $\dfrac{7{,}4}{\sin^3 46{,}5^\circ} =$ ....
16. $285 \cdot \cos^3 53{,}2^\circ =$ ....
17. $\cot 24{,}5^\circ \cdot \cos 62{,}2^\circ =$ ....
18. $\sin^2 43{,}5^\circ \cdot \cos 58{,}4^\circ =$ ....
19. $\dfrac{1}{\sin^2 26{,}8^\circ} =$ ....
20. $\dfrac{\tan 38{,}7^\circ \cdot \sin 29{,}2^\circ}{\cos 47^\circ} =$ ....

Ergebnisse: 1. $3{,}79 \cdot 10^{-6}$; 2. 5,57; 3. 90,8; 4. 0,1225; 5. 1,12; 6. 4,92; 7. 0,320; 8. 0,120; 9. 2,335; 10. 9,14; 11. 3,70; 12. $1{,}23 \cdot 10^3$; 13. 2,285; 14. 20,5; 15. 19,4; 16. 61,3; 17. 1,025; 18. 0,2485; 19. 4,92; 20. 0,573.

15. Übersicht:
Darstellung der wichtigsten Rechenoperationen

15.1 Erläuterungen

In der folgenden Übersicht wird zusammenfassend dargestellt, wie die wichtigsten Rechenoperationen mit nur je einer einzigen Bewegung des Schiebers und des Läufers (evtl. sogar mit nur einer Läuferbewegung) ausgeführt werden können. Die dabei verwendeten einfachen Symbole werden zunächst nochmals erklärt:

1. Rechenoperationen mit nur einer Läuferbewegung.

   Beispiel: Zur Berechnung von $a^{3/2} = (\sqrt{a})^3$ stellt man den mittleren Läuferstrich auf den Wert a der Skala A (Symbol: A a) und liest dann unter dem Läuferstrich auf Skala K das Ergebnis ab (Symbol: K: $a^{3/2}$). Dies wird zusammen so dargestellt:

   A a ∣ K: $a^{3/2}$

   Der senkrechte Strich bedeutet dabei das senkrechte Gegenüberstehen der beiden Werte a und $a^{3/2}$.

   Wird wie in der folgenden Tabelle die betreffende Operation schon zuvor genannt, so kann auf die Wiederholung verzichtet werden. Man schreibt dann nur:

$a^{3/2}$	A a ∣ K:

2. Operationen mit einer Schieberbewegung.

   Beispiel: Gesucht ist das Produkt a · b.

   Darstellung:

a · b	D a ∣ C 1 C b ∣ D:	d. h. man stellt senkrecht über D a die Marke C 1 d. h. senkrecht unter C b steht dann auf Skala D das Ergebnis.

15.2 Potenzen

		mit Novo-Duplex auch (genauer):	Erläuterung des Rechenvorgangs:
a^2	D a ∣ A:	W a ∣ D:	
a^3	D a ∣ K:		
	D a ∣ Bl a B 1 ∣ A:	W a ∣ Cl a C 1 ∣ D:	$(a \cdot \sqrt{a})^2$
a^4	D a ∣ Cl a B 1 ∣ A:		$(a : \frac{1}{a})^2$
	K a ∣ Cl a C 1 ∣ K:		$(\sqrt[3]{a} : \frac{1}{a})^3$
		W a ∣ A:	$(a^2)^2$
		W a ∣ W' 1 W' a ∣ D:	$(a \cdot a)^2$
a^5	D a ∣ Cl a B a ∣ A:		$(a : \frac{1}{a})^2 \cdot a$
a^6	D a ∣ C 1 C a ∣ K:		$(a \cdot a)^3$
		W a ∣ K:	$(a^2)^3$
$a\,b^2$	A a ∣ B 1 C b ∣ A:	D a ∣ C 1 W b ∣ D:	
$a^2\,b$	D a ∣ C 1 B b ∣ A:	W a ∣ W' 1 C b ∣ D:	
$a\,b^3$	K a ∣ B 1 C b ∣ A:		
$a\,b^4$	A a ∣ Cl b C b ∣ A:		$(a : \frac{1}{b^2}) \cdot b^2$
	D b ∣ Bl a C b ∣ A:	W b ∣ Cl a W' b ∣ D:	$(b^2 : \frac{1}{a}) \cdot b^2$
$a^2\,b^2$	D a ∣ C 1 C b ∣ A:	W a ∣ W' 1 W' a ∣ D:	$(a \cdot b)^2$
	D a ∣ Cl b C 1 ∣ A:		$(a : \frac{1}{b})^2$

		mit Novo-Duplex auch (genauer):	Erläuterung des Rechenvorgangs:
$a^2 b^3$	D a | Cl b B b | A:		$(a : \frac{1}{b})^2 \cdot b$
$a^2 b^2 c$	A c | Cl a C b | A:		$(c : \frac{1}{a^2}) \cdot b^2$
	D a | Bl c C b | A:	W a | Cl c W' b | D:	$(a : \frac{1}{c}) \cdot b^2$
$a^3 b^3 c$	K c | Cl a C b | K:		$(c : \frac{1}{a^3}) \cdot b^3$
$\frac{a}{b^2}$	A a | C b C 1 | A:	D a | W' b W' 1 | D:	
	A a | B 1 Cl b | A:		$a \cdot \frac{1}{b^2}$
$\frac{a}{b^3}$	K a | C b C 1 | K:		
$\frac{a^2}{b^3}$	D a | C b Bl b | A:	W a | W' b Cl b | D:	$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{1}{b}$
	D a | B b Cl b | A:		$\frac{a^2}{b} \cdot \frac{1}{b^2}$
$\frac{a^2}{b}$	D a | B b B 1 | A:	W a | C b C 1 | A:	
$\frac{a^3}{b}$	D a | B b B a | A:	W a | C b C a | D:	$\left(\frac{a^2}{b}\right) \cdot a$
	D a | K' b K' 1 | K:		
$\frac{a^3}{b^2}$	A a | Cl a Cl b | A:		$a : \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}$
$\frac{1}{a^2}$	C a | Bl:	W a | Dl:	
	Dl a | A:		
	Cl a | B:		

		mit Novo-Duplex auch (genauer):	Erläuterung des Rechenvorgangs:
$\frac{1}{a^3}$	Dl a | K:		
	Cl a | K':		
$\frac{1}{a^4}$	D 1 | C a Cl a | A:		$\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}\right)^2$
	D 1 | C a D a | Bl:	W 1 | W' a W a | Cl:	$(a \cdot a)^{-2}$
		W 1 | W' a W' 1 | A:	$\left(\frac{1}{a}\right)^4$
$\frac{1}{a \cdot b}$	D 1 | C a Cl b | D:		$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$
$\frac{1}{ab^2}$	A 1 | B a Cl b | A:		$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b^2}$
		Dl a | W' b W' 1 | D:	$\frac{1}{a} : b^2$
$\frac{1}{a^2b^2}$	D 1 | C a Cl b | A:		$\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right)^2$
		W a | W' 1 W' b | Dl:	$(a \cdot b)^{-2}$
$\frac{1}{a^2b^3}$	K a | C b Cl a | K:		$\frac{a}{b^3} \cdot \frac{1}{a^3}$

15.3 Wurzeln

		mit Novo-Duplex auch (genauer):	Erläuterung des Rechenvorgangs:
$\sqrt{a}$	A a | D:	D a | W:	
$\sqrt{a^3}$	A a | K:		
$\sqrt[3]{a}$	K a | D:		
$\sqrt[3]{a^2}$	K a | A:		
$\sqrt[4]{a}$		A a | W:	
$\sqrt{a \cdot b}$	A a | B 1 B b | D:	D a | C 1 C b | W:	
$\sqrt{a \cdot b \cdot c}$	A a | Bl b B c | D:	D a | Cl b C b | W:	
$a\sqrt{b}$	D a | C 1 B b | D:	W a | W' 1 C b | W:	
	A b | Cl a C a | D:		$(\sqrt{b} : \frac{1}{a}) \cdot a$
$a^2\sqrt{b}$		W a | W' 1 B b | D:	
		W a | Cl b W' a | W:	$(a : \frac{1}{\sqrt{b}}) \cdot a$
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	A a | B b B 1 | D:	D a | C b C 1 | W:	
$\frac{\sqrt{a}}{b}$	A a | C b C 1 | D:	D a | W' b W' 1 | W:	
$\frac{a}{\sqrt{b}}$	D a | B b C 1 | D:	W a | C b W' 1 | W:	
$\sqrt{\frac{a \cdot b}{c}}$	A a | B c B b | D:	D a | C c C b | W:	
$\sqrt{\frac{a}{b \cdot c}}$	A a | B b Bl c | D:	D a | C b Cl c | W:	

		mit Novo-Duplex auch (genauer):	Erläuterung des Rechenvorgangs:
	Bl a | C:	Dl a | W:	
$\frac{1}{\sqrt{a}}$	B a | Cl:		
	A a | Dl:		
$\frac{1}{\sqrt{a \cdot b}}$	A 1 | B a A b | Cl:		$\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}$
	A a | B 1 B b | Dl:	Dl a | Cl 1 Cl b | W:	
$\frac{1}{a\sqrt{b}}$	A b | Cl a D 1 | C:		$(b : \frac{1}{a})$
	D 1 | C a Bl b | D:	W 1 | W' a Cl b | W:	$\frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{b}}$

15.4 Operationen mit trigonometrischen Funktionen

Hinweis: Alle folgenden Rechenoperationen mit der Skala S' können analog auch mit cos α statt sin α ausgeführt werden; alle Operationen, bei denen die Skala S' nicht benötigt wird, können analog auch mit cos α, tan α und cot α statt sin α bzw. sin β ausgeführt werden.

		nur mit Novo-Duplex	nur mit Duplex
$a \cdot \sin\alpha$	S α | C 1 C a | D:		
$(a \cdot \sin\alpha)^2$	S α | C 1 C a | A:		
$\sqrt{a} \cdot \sin\alpha$		S α | C 1 C a | W:	
$\frac{a}{\sin\alpha}$	S α | C a D 1 | C:		C a | S' α C 1 | D:
$\frac{\sin\alpha}{a}$	S α | C a C 1 | D:		
$\frac{a}{b}\ \sin\alpha$	S α | C b C a | D:		
$\sin\alpha\ \sin\beta$			S α | C 1 S' β | D:
$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$			S α | S' β C 1 | D:
$\frac{1}{\sin\alpha}$		S α | DI:	S' α | CI:
$\frac{1}{\sin^2\alpha}$	S α | C 1 A 1 | B:		S α | BI:
$(\sin\alpha\ \sin\beta)^2$			S α | C 1 S' β | A:
$\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2$			S α | S' β C 1 | A:

16. Stichwortverzeichnis