FABER-CASTELL

Funktionenschieber

A.W. FABER-CASTELL, STEIN BEI NÜRNBERG

Geleitwort.

Es sei dem Unterzeichneten gestattet, von ganzem Herzen zu danken:

der Firma **A. W. Faber-Castell** für die Großzügigkeit, mit der sie sich dieses Gerätes annahm,

Herrn Fachinspektor Prof. Dr. Anton **Hossner,** Wien, und Herrn Dipl.-Ing. Arch. Dr. Ferdinand **Rogatsch,** Direktor der Bundesgewerbeschule Villach, für bedeutungsvolle Förderung,

den Fachlehrern der Abt. Tischlereifachschule und mehreren Studierenden der höheren Abteilungen der Bundesgewerbeschule Villach für ihre freiwillige, in der Freizeit geleistete Mithilfe beim Bau von Versuchsgeräten,

meinem Fachkollegen und Freunde Robert **Martinz,** der mir während der ganzen Entwicklung des Funktionenschiebers ein ständiger, unentbehrlicher Mitarbeiter war.

Villach, im April 1954.

Dr. Th. Marzani.

Vorwort.

Zu Teil A:

In seiner vorliegenden ersten Form ist der Funktionenschieber vorwiegend zur Verwendung als Demonstrationsgerät für Schulen aller Stufen und Lehrwerkstätten eingerichtet. Dieser Aufgabe ist der Teil A der Anleitung angepaßt. Es wurde hiebei darauf Bedacht genommen, daß zwar eine Fülle lehrreicher Beispiele geboten wird, aber jede einzelne Vorführung mühelos durchführbar ist.

Die **Gliederung des Teiles A** nimmt möglichst auf die Bedürfnisse der verschiedenen Schulstufen Rücksicht. Die elementaren Flächenverwandlungen (§ 4) sind schon in Grundschulen verwendbar. Die Ellipse als affine Figur des Kreises (§ 5) und die Funktion bzw. Gleichung zweiten und dritten Grades (§ 6 und § 7) kommt für mittlere Schulen und für mittlere Jahrgänge höherer Schulen in Betracht. Was weiter folgt (§ 8 bis § 13), ist für die Oberstufe allgemeinbildender und technischer Lehranstalten (insbesondere für Elektrotechnik) von Bedeutung.

Besonderer Begründung bedarf es jedoch, weshalb wir das Prinzip der **Schwingungsüberlagerung** und **Vorführungen zur Wellenlehre** (soweit sie ohne nennenswerten Vorkenntnissen — insbesondere ohne Winkelfunktionen — gezeigt werden können) als § 2 und § 3 an die Spitze der Anwendungenen stellten.

Die Begriffe „Schwingung", „Welle", „Frequenz", „Interferenz", „Schwebung" und dergleichen gehören heute zu den Grundbegriffen einfachster Bildung. Schwingungsüberlagerungen bewirken nicht nur alle wesentlichen Erscheinungen der **Akustik** und wichtige Erscheinungen der Optik, sie gewinnen vielmehr von Jahr zu Jahr an Bedeutung durch die unaufhörliche, für unsere Zeit charakteristische Entwicklung der **Elektrotechnik.** Zur Erläuterung technischer Vorgänge, die immer deutlicher unsere Lebensform beeinflussen, ist es unerläßlich, auch in **Pflichtschulen, Unterstufen** aller Schultypen, **Berufsschulen** und **Lehrwerkstätten** von Schwingungen und ihren Zusammensetzungen zu sprechen. Ohne anschauliche Vorführung ist dies jedoch ein mühevolles und wenig fruchtbares Beginnen! Mit den einfachen, überzeugenden Demonstrationen zur Wellenlehre befriedigt der Funktionenschieber somit eine Forderung der Zeit!

Für höhere Schulstufen liegt die große Bedeutung des Funktionenschiebers in der anschaulichen Vertiefung des Verständnisses für den grundlegenden Begriff der modernen Mathematik, den **Funktionsbegriff.** Selbst Mathematiker bestätigen, manches mit dem Gerät dargestellte Funktionsbild habe sie überrascht und angeregt.

Zu Teil B:

Bei genügendem Interesse ist beabsichtigt, eine Zusatz-Anleitung als Teil B herauszubringen, da der Funktionenschieber nicht nur ein Demonstrationsgerät, sondern auch ein **Rechengerät** für Mathematiker, Naturwissenschaftler und Techniker werden soll. Es wurden deshalb vorsorglich im Teil A schon jetzt entsprechende Hinweise für diesen Fall eingeschaltet.

Eine Bitte:

Wir hoffen, der Funktionenschieber werde Pioniere finden, die mit ihm selbständig arbeiten, Erfahrungen sammeln, Anwendungsmöglichkeiten erkunden — und all dies nicht für sich behalten, sondern der Weiterentwicklung dienstbar machen.

Wir bitten, uns mitzuteilen:

1. **Praktische Beispiele** zu den Anwendungen, die in der Anleitung besprochen oder angedeutet werden (in Fachwissenschaften oder technischen Anwendungen auftretende transzendente Gleichungen, Gleichungen vierten Grades, zusammengesetzte Funktionen, Kurvenscharen usw.).
2. **Anwendungsmöglichkeiten,** die in der Anleitung nicht erwähnt sind (auch bloße Anregungen oder Vermutungen),
3. **Schwierigkeiten,** die bei praktischen Anwendungsversuchen aufgetreten sind,
4. **Ergänzungs-** bzw. **Verbesserungswünsche.**

Beispiele und Anregungen, die von allgemeinem Interesse sind, werden evtl. in weiteren Auflagen der Anleitung im Einvernehmen mit den Einsendern berücksichtigt.
Der Weiterentwicklung dient jede Mitteilung, enthalte sie auch nur sachliche Kritik oder Berichte über die Wirkung bei Vorführungen!

Allen Einsendern sei im vorhinein herzlich gedankt!

A. W. Faber-Castell, Stein bei Nürnberg.

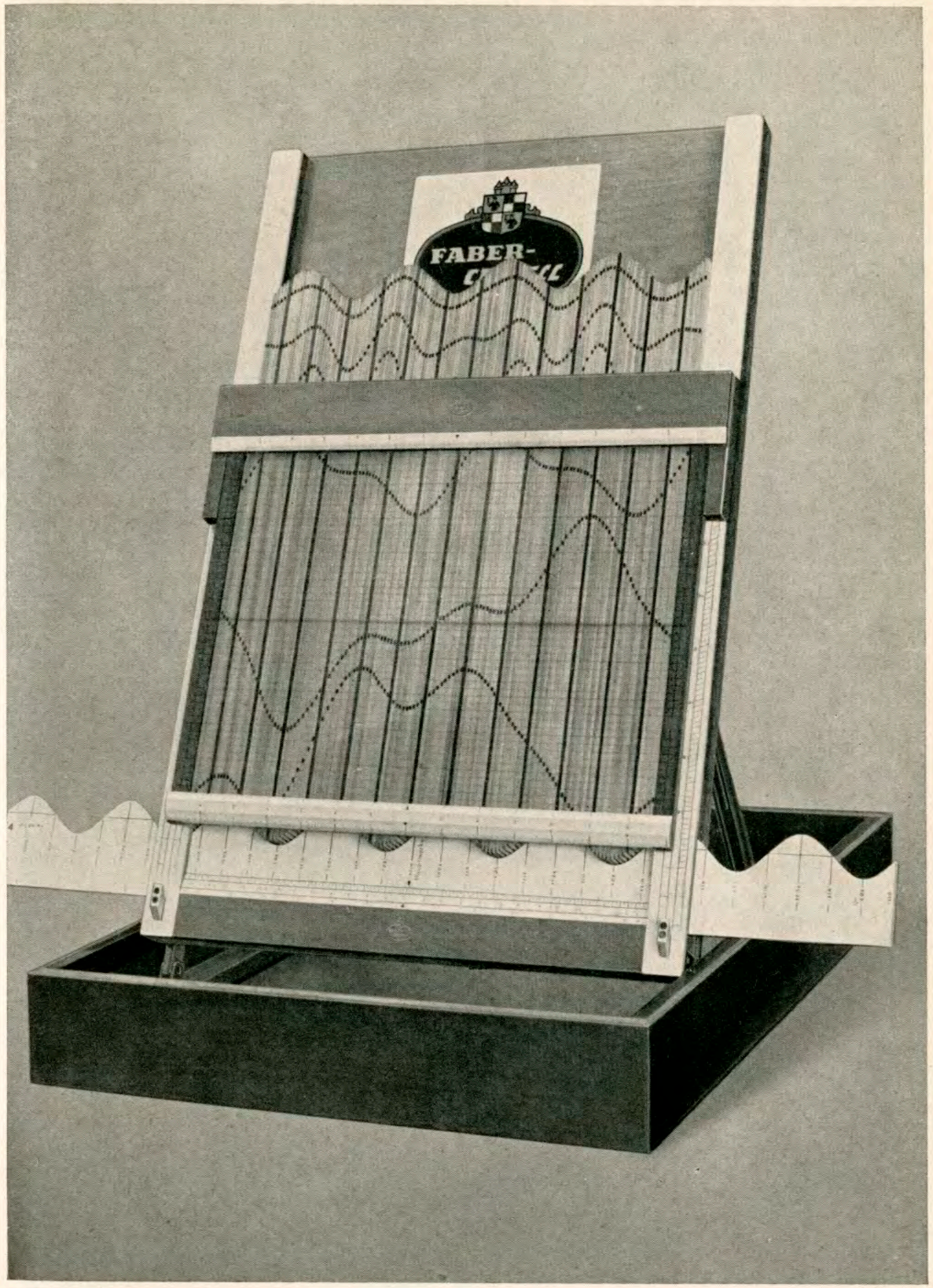


Bild 1

Teil A

Grundanwendungen

Inhalt.

		Altersstufe	Seite
§ 1.	Die Bestandteile und ihre Handhabung	—	4
§ 2.	Überlagerung zweier Schwingungen	12 J.	7
§ 3.	Wichtige Vorführungen zur Wellenlehre	12 J.	11
§ 4.	Elementare Flächenverwandlungen	11 J.	16
§ 5.	Ellipse als affine Figur des Kreises	13 J.	19
§ 6.	Quadratische Funktion und Gleichung	14 J.	21
§ 7.	Kubische Funktion und Gleichung (Phasenmeth.)	15 J.	25
§ 8.	Funktionswerte transzendenter Summenfunktion	16 J.	28
§ 9.	Transzendente Gleichungen	16 J.	32
§ 10.	Das Negativverfahren	17 J.	36
§ 11.	Fourier-Reihen	17 J.	39
§ 12.	Weitere Beispiele zu § 10	17 J.	43
§ 13.	Die Gleichung 4. Grades (Hyperbelmethode)	17 J.	45

Beachte:

Der Funktionenschieber ist für **alle Schultypen** von Bedeutung. Es ist deshalb im Inhaltsverzeichnis ganz allgemein die **Altersstufe** angeführt, in der die betreffenden Anwendungen frühestens auf fruchtbaren Boden fallen.

Die Anleitung (Teil A) ist jeweils der angeführten Altersstufe angepaßt, also in den ersten Paragraphen sehr ausführlich, in den späteren wesentlich kürzer gefaßt.

Werden die Anwendungen der ersten Paragraphen gereifteren Hörern vorgeführt, wird der Vortragende die Ausführungen der Anleitung entsprechend zusammenfassen.

§ 1 Die Bestandteile und ihre Handhabung.

Anmerkung: Dieser Paragraph enthält keine Vorführungen, er soll nur den Vortragenden mit dem Gerät vertraut machen.

Hauptbestandteile des Funktionenschiebers:

1. der **Rahmen,**
2. die **Streifenserie,**
3. der **Stab** und vier **Schablonen,** die mit 1 bis 5 beziffert sind (also gilt der Stab als „Schablone 1"),
4. die **Klemme** zur Fixierung des Stabes,
5. der **Läufer** mit transparenter **Koordinatenscheibe,**
6. die **Hyperbelscheibe** aus transparentem Astralon,
7. das **Stativ,** das zugleich als Behälter dient.

Beilagen zum Funktionenschieber:

1. die **Anleitung** (Teil A) mit 16 **Bildern,**
2. die **Beilagen I. und II.** auf transparentem Astralon,
3. zwei **Glasschreiber** A. W. Faber / 2251 (rot und blau).

Das Gerät kann verwendet werden:

1. **Liegend:** Zu empfehlen bei Arbeit zu eigenem Gebrauch oder bei Vorführung für wenige Zuhörer.
2. **Aufgerichtet:** Zu empfehlen bei Vorführungen vor größerem Publikum.
   Die Stellung ist in Bild 1 (siehe unten) ersichtlich. Nach dem Öffnen Deckel hochstellen und nach vorne ziehen. Stützen ausschwenken und im Kastenboden in gewünschter Neigung einrasten.

Handhabung:

Die Handhabung wird an Hand der 16 Bilder der Anleitung besprochen. Diese Bilder beinhalten zugleich die Figuren zu zahlreichen Beispielen der Anleitung. Darauf beziehen sich die in die Bilder eingezeichneten ergänzenden Linien und Hinweise.

Bild 1: **Funktionenschieber in aufgerichteter Stellung** mit eingeführter Schablone und aufgesetztem Läufer.

Bild 2: **Rahmen mit Streifenfläche a in „Hochstellung".**

Bezeichnungen:

G_1, G_2	Grundrasten,
H_1, H_2	Hochrasten,
Ph	Phasenskala,
+ S	positive } Steigskala
— S	negative } Steigskala
a 1 bis a 7	Musterkurven der Streifenfläche a

Überlagerung einer Schablone.

Befindet sich die Streifenserie in „Hochstellung" (Bild 2), so kann man durch die seitlichen Schlitze des Rahmens eine Schablone einführen.

Es ist dabei ein geringer Widerstand zu überwinden. Er wird von einer Vorrichtung bewirkt, die ein ungewolltes Verschieben der Schablone verhindert. Man achte bei der Einführung, daß die Schablone stets mit ihrer geraden unteren Kante in der Nut läuft, die von der Phasenskala verdeckt wird.

Ist die Schablone in die gewünschte Stellung gebracht, so entfernt man den Stab und läßt die Spitzen der Streifen auf der Schablone ruhen.

Beachte hiebei:

1. bei liegendem Rahmen werden die Streifen mit der Hand an die Schablone geschoben, und zwar paketweise (möglichst zuerst in die „Senken").
2. bei aufgerichtetem Rahmen fallen die Streifen durch ihr Eigengewicht, bedürfen jedoch zum Teil einer Korrektur mit den Fingern, die kaum Sekunden beansprucht. Zur Schonung der Spitzen kann man mit den Daumen die Hochrasten eindrücken und den Fall der Streifen mit dem Stab zu einem Gleiten verzögern.

Bild 3: **Schablone 2 „mit Phase Null" überlagert!**

Damit ist gemeint: die Hauptmarke der Schablone ist auf den Nullpunkt (Mittelpunkt) der Phasenskala eingestellt.

Aufhebung einer Schablonenüberlagerung.

Will man eine Überlagerung durch Entfernen der Schablone „aufheben" oder durch „Phasenverschiebung" der Schablone verändern, so schiebt man die Streifen mit dem Stab in die Hochstellung zurück.

Man führt dabei den Stab beiderseits auf dem Rahmen aufruhend über die nachgebenden Hochrasten hinweg, bis diese wieder herausschnappen und das Anlegen des Stabes gestatten. Die Streifenserie befindet sich sodann wieder in der Stellung von Bild 2. Die Schablone kann nun entfernt oder nach Belieben verschoben werden. So kann man z. B. von der Stellung Bild 3 zur Stellung Bild 4 übergehen, indem man die Schablone nach rechts verschiebt.

Bild 4: **Schablone 2 „mit Phase $\frac{\pi}{2}$" überlagert.**

Damit ist gemeint: Die Hauptmarke der Schablone ist auf die Marke $\frac{\pi}{2}$ der Phasenskala eingestellt (Pfeil 1 in Bild 4).

Bedeutung der Nebenmarken auf den Schablonen.

Zur leichteren Einstellung häufig auftretender Phasen trägt die Schablone noch „Nebenmarken". Wir können demnach auch sagen: die Schablone 2 ist in Bild 4 **„mit Phase Null für Nebenmarke (— sin)"** überlagert (Pfeil 2 in Bild 4).

Beachte: Die Bezeichnung der Nebenmarken mit (— sin), (+ cos) und (— cos) ist zunächst nur für den Vortragenden bestimmt, da die Vorführungen zur Wellenlehre (§ 2 und § 3) für alle Schultypen bestimmt sind, also die Kenntnis der Winkelfunktionen nicht voraussetzen.

Korrektur der Streifenstellung:

Beim Vorgang der Überlagerung werden manchmal die Streifen auf einer Seite mehr zusammengedrängt, als ihrer normalen Verteilung entspricht. Darunter leidet die Genauigkeit empfindlich. Man achte deshalb darauf, daß der Mittelstreifen zum Nullpunkt der Phasenskala weist und korrigiere nötigenfalls.

Ist große Genauigkeit erforderlich (z. B. bei graphischer Lösung von Gleichungen), so kontrolliere man die Streifenverteilung mit der Phasenskala des aufgesetzten Läufers.

Bild 5: **Schablone 3 mit Phase Null.**

Bild 6: **Schablone 3 mit Phase $-\frac{\pi}{6}$**
bzw. mit Phase Null für Nebenmarke (+ cos).

Bild 7: **Schablone 5 mit Phase Null.**

Bild 8: **Schablone 5 mit Phase — 0,314**
bzw. mit Phase Null für Nebenmarke (+ cos).

Bild 9: **Schablone 5 mit Phase — 0,628**
bzw. mit Phase Null für Nebenmarke (— sin).

Wendung der Streifenserie.

Man wendet die Streifen bündelweise, so daß dabei die unteren Enden nach oben kommen. Die Streifen verändern also ihre Lage in horizontaler Richtung nicht, sie behalten ihre Reihung bei.

Sollten die Streifen — etwa durch Entgleiten beim Wenden — durcheinander geraten, so beachte man bei ihrer Neuordnung die Numerierung auf den Breitseiten.

Bild 10: **Streifenfläche b in „Grundstellung".**
Bezeichnungen:
b 1 bis b 7 . . . . . Musterkurven bzw. Musterfiguren der Streifenfläche b.

Bild 11: **Stabüberlagerung mit Steigung k = + 0,5.**

Bild 12: **Stabüberlagerung mit Steigung k = — 0,5.**

Überlagerung des Stabes.

Man hebt ein Ende des Stabes, bis seine **Unterkante** auf die gewünschte Marke der Steigskala eingestellt ist (rechts — positiv; links — negativ!).
Das andere Stabende ruht weiterhin auf der Grundraste, deren Außenkante somit als Drehpunkt dient.

Ruht das gehobene Ende auf der rechten (linken) Hochraste, so beträgt die Steigung k = + 0,5 (k = — 0,5), wie die Unterkante des Stabes in Bild 11 (Bild 12) anzeigt.

Korrektur der Streifenstellung.

Die Streifen werden durch das Heben des Stabes seitlich abgedrängt. Man drückt deshalb nach Einstellung des Stabes mit dem Finger von der Außenseite an den untersten Streifen (rechts in Bild 12) und läßt wieder locker. Ist große Genauigkeit erforderlich, so prüft man mit aufgesetztem Läufer den Erfolg dieser Korrektur. Genauere Korrektur ist durch weiteren Fingerdruck leicht zu erreichen.

Beachte: Man überzeuge sich auch stets, ob das untere Stabende gewiß auf der Grundraste aufliegt, nicht etwa auf dem Rahmen oder auf der Tischfläche!

Bild 13: **Stabüberlagerung mit Steigung k = + 1.**

Bild 14: **Stabüberlagerung mit Steigung k = — 1.**

Fixierung der Stabstellung mit der Klemme.

Die Klemme wird so auf den Rahmen gesteckt, daß die Stellschraube nach außen zeigt. Durch Anziehen der letzteren wird die Klemme in der gewünschten Lage fixiert.

Bild 15: **Anwendung der Hyperbelscheibe (für § 13).**

Bild 16: **Überlagerungen mit verschiedener Phase**
(Erläuterung: § 3, Beispiel 6, § 12, Anmerkung).

§ 2 Überlagerung zweier Schwingungen.

a) Vorbereitung.

Vorbemerkung:
In dieser Vorbereitung sollen die grundlegenden Begriffe über Schwingungen und Wellen zusammengefaßt werden, die der Physikunterricht auch an Elementarschulen bzw. Unterstufen mittlerer und höherer Lehranstalten nicht mehr entbehren kann.

Wie die Erklärung der Begriffe der Schulstufe entsprechend ausführlich auszugestalten ist, braucht hier kaum erwähnt werden. Es ist jedoch zu empfehlen, mit den Vorführungen nicht erst nach Einführung aller Begriffe einzusetzen. Die Vorführungen des § 3 können verwendet werden, wenn nur ein Teil der Begriffe bekannt ist. Die Einführung weiterer Begriffe soll wieder mit Vorführungen verbunden werden (dieselbe Vorführung kann ja, wie in diesem Punkte unter I. und II. auseinandergesetzt werden soll, verschieden aufgefaßt werden!).

Es gelte bei Verwendung des Funktionenschiebers als Lehrbehelf der Grundsatz: nicht viel Theorie vor der ersten Vorführung, besser eine Vorführung bei schrittweise ergänzter Theorie mehrmals wiederholen! Muß man Figuren **zeichnen**, gestattet dies der Zeitmangel nicht. Eine Einstellung mit dem Funktionenschieber läßt sich jedoch in wenigen Sekunden wieder herstellen!

P e r i o d i s c h e K u r v e n.

Fig. 1 und Fig. 2 zeigen periodische Kurven. Sie lassen sich in kongruente Stücke teilen. Ein solches Stück ist eine „**P e r i o d e**".

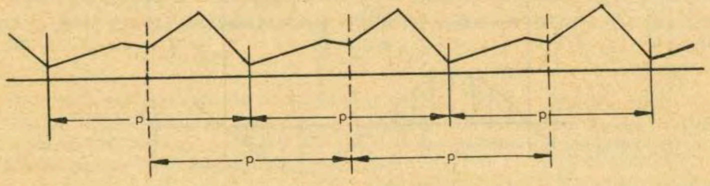


Fig. 1

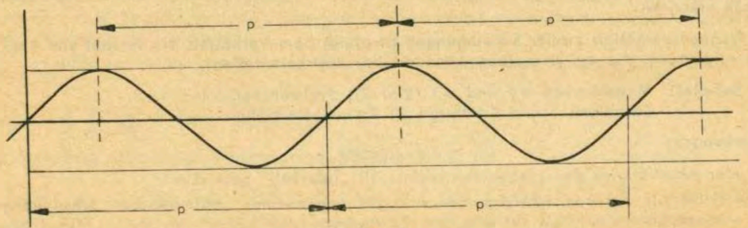


Fig. 2

Je nach den Schnittlängen ändert die Periode ihr Aussehen, nicht aber ihre **Länge!** In Fig. 1 und Fig. 2 ist dies durch volle und punktierte Teilstriche angedeutet. Die Länge der Periode, für die wir im allgemeinen einfach „Periode" sagen, ist mit p bezeichnet.

Die Musterkurven a 1 bis a 4 (Bild 2) und die Randkurven der Schablonen sind periodisch. Wir deuten sie als graphische Darstellungen von „Schwingungen" oder „Wellen". Es sind dies zwei Auffassungen, die auseinandergehalten werden müssen!

I) Periodische Kurven als Darstellungen von Schwingungen.

Unter einer **Schwingung** verstehen wir eine periodische Zustandsänderung an einer bestimmten Stelle, z. B.:

1. Abweichung von der Ruhelage an bestimmter Stelle einer Stimmgabel oder schwingenden Saite,
2. Verdichtung bzw. Verdünnung der Luft an bestimmter Stelle in einer Pfeife (Orgel, Blasinstrument),
3. Stromstärke an bestimmter Stelle einer Wechselstromleitung,
   und viele andere Beispiele!

Wir können eine Schwingung graphisch darstellen, wie wir es z. B. von der „Fieberkurve" her kennen (diese ist ja auch das Bild einer „Zustandsänderung").

Wir versehen hiezu eine horizontale Achse mit einer **Zeitskala** (Fig. 3). Die Fieberkurve hat eine Zeitskala mit Teilstrichen für Stunden, die angeführten Beispiele von Schwingungen benötigen im allgemeinen kleinste Sekundenteile als Teilstriche der Skala.

Wir tragen sodann — von der Achse ausgehend — zu jedem Zeitpunkt den Zustand (die Abweichung, Verdichtung, Stromstärke usw.) auf, als vertikale Strecke dargestellt. In Fig. 3 wird dies durch Pfeile (Vektoren) angedeutet. Wir bezeichnen diese Strecken als **„Ausschläge"**. Eine „nach unten" aufgetragene Strecke bedeutet einen negativen Ausschlag (Abweichung in entgegengesetzter Richtung, Verdünnung, negative Stromstärke usw.).

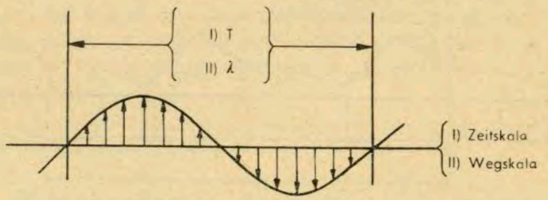
Verbinden wir die Endpunkte der aufgetragenen Strecken, so erhalten wir als graphische Darstellung (als „Bild") der Schwingung eine periodische Kurve.

Der Zeitabschnitt, der auf der Zeitskala durch eine Periode der Bildkurve bestimmt wird, heißt die **„Schwingungsdauer" T** (Fig. 3).

Grenzen wir auf der Zeitskala einen Zeitabschnitt von einer Sekunde ab, so liegt eine bestimmte Anzahl n von Perioden der Bildkurve innerhalb dieses Abschnittes. n heißt die **„Schwingungszahl"** oder **„Frequenz"** der Schwingung.

Anmerkung: Den Begriff „Kreisfrequenz" $\omega = 2\pi \cdot n$ benötigen wir nicht.

Fig. 3



Die Vorführungen des § 3 sollen für alle Frequenzbereiche gelten (Schall, elektrische Schwingungen aller Bereiche usw.). Es interessiert uns also nicht die Frequenz an sich, sondern nur das **„Frequenzverhältnis"** zweier Schwingungen. Wir können es aus den Bildkurven der Schwingungen erkennen:

Das Frequenzverhältnis zweier Schwingungen ist gleich dem Verhältnis der Anzahl von Perioden ihrer Bildkurven, die auf denselben Abschnitt der Zeitskala fallen!

Zum Beispiel: Musterkurven a4 und a3 (Bild 2): Frequenzverhältnis 1 : 3.
Schablone 2 und Schablone 3: Frequenzverhältnis 2 : 3.

Anmerkungen:

1. In der Akustik wird das Frequenzverhältnis als **„Intervall"** bezeichnet.
2. Die wichtigste Art von Schwingungen sind die sogenannten **„harmonischen Schwingungen"**. Die Musterkurven a1 bis a4 und die Randkurven der Schablonen stellen Schwingungen dieser Art dar.

II) Periodische Kurven als Darstellungen von Wellen.

Unter einer **Welle** verstehen wir die Fortpflanzung einer Schwingung (in Instrumentsaite, Luft, Wasser, Leitungsdraht usw.).

Wir können den Zustand, den die Welle in einem Mittel längs eines Weges in ihrer Fortpflanzungsrichtung zu einem bestimmten Zeitpunkt bewirkt, graphisch darstellen.

Wir versehen hiezu eine horizontale Achse mit einer **Wegskala** (Fig. 3).

Zu jedem Teilstrich der Wegskala tragen wir den an dieser Stelle von der Welle bewirkten „Ausschlag" vertikal auf. Wieder erhalten wir eine periodische Kurve als „Bild".

Eine Periode der Bildkurve stellt nunmehr eine **„Wellenlänge"** λ dar (Fig. 3). Ist T die Schwingungsdauer der sich fortpflanzenden Schwingung und c ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit (etwa von Schall in Luft), so ist $\lambda = c \cdot T$.

Verstehen wir unter dem Frequenzverhältnis zweier Wellen mit gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit das Frequenzverhältnis der entsprechenden Schwingungen, so gilt:

Das Frequenzverhältnis zweier Wellen ist gleich dem Verhältnis der Anzahl von Perioden ihrer Bildkurven, die auf denselben Abschnitt der Wegskala fallen.

Vergleichen wir also zwei Kurven (Musterkurven bzw. Schablonen), so gilt für beide Auffassungen (Darstellung von Schwingungen oder Wellen) dasselbe Frequenzverhältnis. Die Vorführungen des § 3 gelten deshalb für beide Auffassungen. Die Bezeichnung ist weiterhin vorwiegend der Auffassung I angepaßt.

Anmerkung: Bei einigen Fällen von „Querwellen" kann die Bildkurve nicht nur als graphische Darstellung, sondern als Abbildung sichtbarer Erscheinungen aufgefaßt werden; z. B.:

1. bei schwingenden Saiten als vergrößerte Momentaufnahme,
2. bei Wasserwellen als vertikaler ebener Schnitt durch die Wasseroberfläche.

b) Überlagerung zweier Schwingungen (Wellen).

Wirken zwei Schwingungen (Wellen) zusammen, so entsteht eine **Überlagerung (Interferenz)**, bei der sich die Ausschläge „überlagern": wo beide Ausschläge gleiches Vorzeichen haben, addieren sie sich zu einem im Betrage größeren Ausschlag (gleichen Vorzeichens), wo sie verschiedenes Vorzeichen haben, heben sie sich teilweise oder eventuell ganz auf.

Diese Überlagerungen führen wir mit dem Funktionenschieber aus. Es ist jedoch notwendig, **eine** solche Überlagerung einfachster Art zeichnerisch auszuführen.

Zweck:

1. Man lernt verstehen, wie sich die Überlagerung mit dem Schieber vollzieht,
2. Man erfährt, welche Mühe es kostet, diese einfachste Anwendung des Funktionenschiebers durch Zeichnung zu ersetzen und dabei ein einigermaßen gleichwertig regelmäßiges, genaues und überzeugendes Überlagerungsbild zu erzielen!

Anmerkungen:

1. Der Auffassung I entsprechend gebrauchen wir künftig stets den Begriff „Schwingung". In der Auffassung II ist er durch den Begriff „Welle" zu ersetzen. Daneben verwenden wir im allgemeinen den Begriff „Periode", der den Auffassungen entsprechend „Schwingungsdauer" bzw. „Wellenlänge" bedeutet.
2. Das Ergebnis von Überlagerungen bezeichnen wir auch als **„resultierende Schwingung"**.

Beispiel 1 (Fig. 4 und Bild 5):

Überlagerung mit dem Frequenzverhältnis 2 : 3.

Die Kurve s_1 in Fig. 4 a (dünne Linie) und die Kurve s_2 in Fig. 4 b zeigen zwischen den strichlierten Linien (links und rechts) **zwei** bzw. **drei** Perioden, sie sind also die Bilder von Schwingungen mit dem Frequenzverhältnis 2 : 3!

Anmerkung: Zeichne selbst die Figur! Benütze die Schablonen 2 und 3 hiezu als „Kurvenlineale"!

Die Überlagerung geschieht, indem man die Ausschläge der Schwingung s_1 um die Ausschläge der Schwingung s_2 je nach Vorzeichen vermehrt oder vermindert.

In Fig. 4 ist dies durch Pfeile (Vektoren) angedeutet. Die Streckenübertragung geschieht mit dem Zirkel.

Das Ergebnis ist das Bild der resultierenden „Schwingung" s_i (dicke Linie in Fig. 4 a). Von ihr ist eine Periode gezeichnet (begrenzt von den strichlierten Linien).

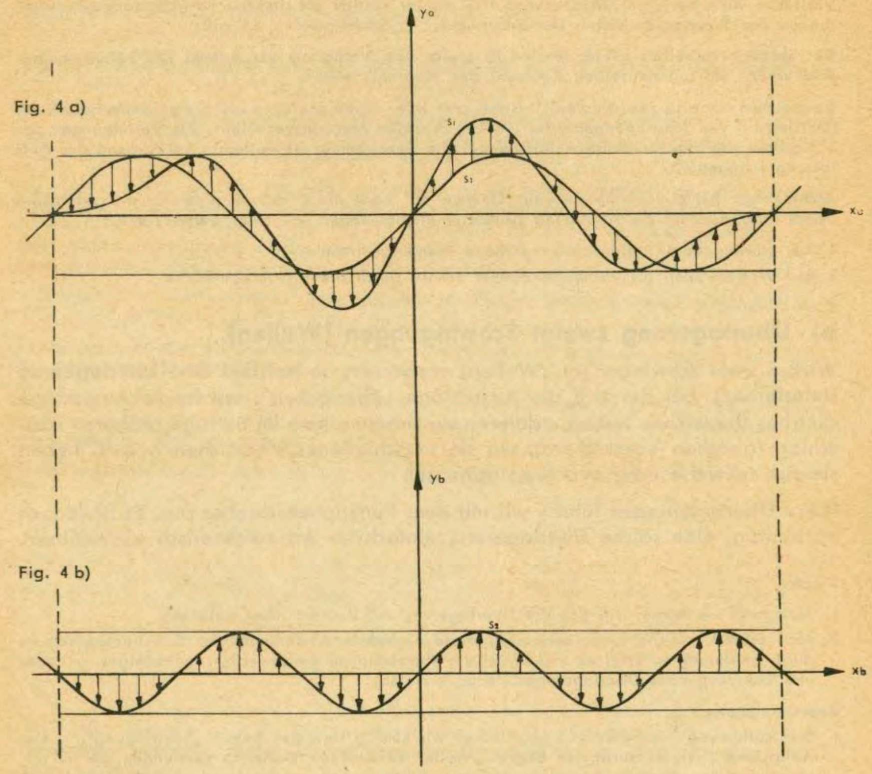


Fig. 4

Dieselbe Überlagerung auf dem Funktionenschieber.

Bringen wir die Streifenserie (Seite a) in „Hochstellung" (Bild 2), so entspricht die Musterkurve a 4 der Kurve s_1 in der Figur 4 a.

Führen wir die Schablone 3 mit Phase Null ein (d. h. Hauptmarke in der Mitte!), so entspricht sie der Kurve s_2 in der Figur 4 b. (Schablonenstellung wie Bild 5!)

Lassen wir nun die Streifenserie an die Schablone gleiten, so erhalten wir die Stellung von Bild 5.

Die Musterkurve a 4 hat sich dabei in die Überlastungskurve s_i verwandelt!

(Den strichlierten Linien von Fig. 4 als Begrenzungen der Periode entsprechen die dritten Streifen von rechts und links!).

Wie kam dies zustande?

Nehmen wir an, alle Streifen hätten ursprünglich mit ihren Spitzen auf der Linie geruht, die in Bild 5 als Achse $\bar{x}$ (1) bezeichnet ist. Wir sehen sodann, daß nach der Überlagerung jeder Streifen gegenüber dieser gedachten Ausgangsstellung um den Ausschlag der Schwingung s_2 (Schablone!) verschoben ist, und zwar bei positivem Ausschlag nach oben, bei negativem nach unten (siehe Bild 5!). Jeder Punkt der Musterkurve a 4 hat dabei die Bewegung seines Streifens mitgemacht! Es ist also dasselbe geschehen, was wir in Fig. 4 mit dem Zirkel punktweise durchgeführt haben!

Im Mittelstreifen hatten die Einzelschwingungen keinen Ausschlag, also hat die Summenschwingung dort keinen Ausschlag. Die x-Achse geht somit durch den Punkt des Mittelstreifens. Wir zeichnen sie mit dem beiliegenden roten Glasschreiber auf die Streifenfläche oder stellen besser den Läufer so ein, daß die Achse der Koordinatenscheibe als x-Achse dient. Wir können sodann an jeder Stelle den Ausschlag der Interferenzschwingung ablesen. Mit der Ablesung von Funktionswerten werden wir uns allerdings erst in § 8 befassen. Vorläufig interessiert uns vorwiegend die bildmäßige Vorführung wichtiger Erscheinungen der Wellenlehre.

Anmerkung: Die Überlagerung des Beispiels 1 ist sehr einfach und übersichtlich. Sie ist daher noch relativ genau durch Zeichnung zu erzielen. Man nehme sich die Mühe, etwa noch Beispiel 3, 4 oder 5 (§ 3) zu zeichnen. Obwohl auch diese Beispiele noch einfach sind, wird es schon schwer fallen, annähernd die Genauigkeit des Funktionenschiebers zu erreichen.

§ 3 Wichtige Vorführungen zur Wellenlehre.

Beachte:

1. Zu jedem Beispiel wird in den Randspalten die nötige Musterkurve und die nötige Schablone angeführt.
2. Die Bilder 1 bis 16 enthalten die Figuren zu zahlreichen Beispielen. Bei der Nummer des betreffenden Beispiels wird das Bild in Klammer angeführt. Musterkurve Schablone
   Es wird empfohlen, möglichst an Hand der Beschreibung mit dem Gerät zu arbeiten und erst nachträglich die Einstellung durch Vergleich mit dem Bild zu kontrollieren. Man gewinnt so große Sicherheit im Gebrauch des Gerätes und kann bald auf die Kontrolle verzichten.
3. Läßt die Vorbildung des Auditoriums die Verwendung der Funktionsbezeichnungen zu, so beachte man zunächst § 8 (siehe Seite 28).

a) Einfache Interferenzbeispiele.

Beispiel 1 (Bild 5):

Kurve a 4, Schablone 3 mit Phase Null. a 4 3
Dieses Beispiel wurde in § 2 ausführlich besprochen. Die Teilschwingungen haben das Frequenzverhältnis 2 : 3. In der Akustik wird dieses Intervall als **„Quint"** bezeichnet.

Beispiel 2 (Bild 6):

a4 3 Kurve a 4, Schablone 3 mit Phase $-\frac{\pi}{6}$ für die Hauptmarke bzw. Phase Null für Nebenmarke (+ cos).
Dieselben Teilschwingungen wie in Beispiel 1, jedoch mit „Phasenverschiebung". Hiedurch wird die resultierende Schwingung verändert (Bild 6)!

Beispiel 3 (Bild 7):

a4 5 Kurve a 4, Schablone 5 mit Phase Null.
Die Teilschwingungen haben das Frequenzverhältnis 2 : 5. Wie in den früheren Beispielen ist eine Periode der resultierenden Schwingung sichtbar. Ihre Gestalt ist jedoch komplizierter und interessanter (Bild 7).

Beispiel 4 (Bild 8):

a4 5 Kurve a 4, Schablone 5 mit Phase —0,314.
Dieselben Teilschwingungen wie Beispiel 3, jedoch mit Phasenverschiebung. Die resultierende Schwingung ist verändert.

Beispiel 5 (Bild 9):

a4 5 Kurve a 4, Schablone 5 mit Phase —0,628.
Beachte: denkt man sich die linke Hälfte der sichtbaren Periode (Bild 9) rechts angefügt, so erhält man dieselbe Periode wie in Beispiel 3 (Bild 7). Beispiel 3 und Beispiel 5 ergeben also dieselbe resultierende Schwingung. Die Phasenverschiebung der Schablone hat hier nur eine Phasenverschiebung der resultierenden Schwingung bewirkt.
Diese Beispiele regen dazu an, die Auswirkung der Phasenverschiebung einer Teilschwingung auf die resultierende Schwingung noch deutlicher zu veranschaulichen.

b) Auswirkung der Phasenverschiebung einer Teilschwingung.

Beispiel 6 (Bild 16):

a4 4 Kurve a 4, Schablone 4 mit wechselnder „Phase".
Frequenzverhältnis (Intervall): 1 : 2 **(Oktave).**

Wir führen die Schablone zunächst mit der Phase $-\frac{\pi}{4}$ ein und verschieben sie sodann schrittweise um je $\frac{\pi}{24}$ nach rechts (die Phasenskala hat Marken für Teile von π!). Die aufeinanderfolgenden Phasen der Schablone sind also:

$$-\frac{\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{24};\ -\frac{\pi}{6};\ -\frac{\pi}{8};\ -\frac{\pi}{12};\ -\frac{\pi}{24};\ 0;\ \frac{\pi}{24};\ \frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{8};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{24};\ \frac{\pi}{4}$$

Jede dieser Einstellungen liefert eine veränderte resultierende Schwingung (nur die erste und letzte sind gleich). Paust man sie untereinander auf Transparentpapier, so erhält man die in Bild 16 dargestellte Kurvenschar. Die Anordnung gibt einen guten Eindruck der stetigen Veränderung der resultierenden Schwingung bei stetiger Phasenverschiebung der Schablone.

Der Eindruck wird noch deutlicher, wenn man die Schablone in noch kleineren Etappen verschiebt und die Überlagerungen ebenso untereinander paust.

Das Beispiel lehrt uns:

Gleiche Teilschwingungen ergeben bei Phasenverschiebung im allgemeinen nicht dieselbe resultierende Schwingung.

Akustischer Lehrversuch:

Schlägt man zwei Stimmgabeln verschiedener Tonhöhe wiederholt in gleicher Stärke knapp hintereinander an, so ist der zweite Ton zum ersten gewiß bei jedem Versuch anders „phasenverschoben". (0,001 Sekunden Differenz bedeutet beim eingestrichenen a fast eine halbe Periode Phasenverschiebung!) Die resultierenden Schwingungen sind demnach ebenso verschieden wie die einzelnen Kurven in Bild 16! (Schallplattenrillen würden ähnliche Bilder ergeben!) Dennoch hören wir den Gesamtton bei allen Versuchen gleich! Daraus folgt: das Ohr setzt nicht die Gesamtschwingung in Empfindung um, sondern die Teilschwingungen (unabhängig von Phasenverschiebungen). Die Gesamtschwingung wird demnach in ihre Teilschwingungen zerlegt. Tatsächlich geschieht dies durch die Cortischen Fasern der Basilarmembran, die nur bei bestimmten Frequenzen ansprechen (ähnlich wie Klaviersaiten, die durch von anderen Instrumenten erzeugte Töne zum Mitschwingen angeregt werden).

c) Tonhöhe und Klangfarbe (Grundton und Obertöne).

Werden von einer menschlichen Stimme, von einer Violinsaite, von einer Flöte, von einer Orgelpfeife gleich hohe und gleich starke Töne hervorgebracht, sind die auf das Ohr ausgeübten Eindrücke nicht gleich. Sie sind auch bei verschiedenen menschlichen Stimmen oder bei verschiedenen Geigen nicht gleich. Die Töne unterscheiden sich durch ihre **Klangfarbe!** Die Klangfarbe hat ihre Ursache darin, daß Stimmen und Instrumente nicht einfache Töne hervorbringen (wie annähernd die Stimmgabel), sondern zusammengesetzte Töne. Dem **Grundton** sind dabei **Obertöne** überlagert, deren Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Grundtonfrequenz ist. Man spricht vom „ersten Oberton", wenn das Frequenzverhältnis von Grundton und Oberton 1 : 2 ist, vom „zweiten Oberton" bei 1 : 3 usw. (vom n-ten Oberton bei Frequenzverhältnis 1 : [n + 1]).
Wir betrachten nun die Schwingungsbilder, die sich bei Überlagerung von Grundton und Oberton ergeben.

1. Grundton und erster Oberton (1 : 2).

Diesen Fall hatten wir bereits in **Beispiel 6!**
Weitere Beispiele:

Beispiel 7 (Bild 5 und 6):

Kurve a 3 und Schablone 3 (mit verschiedenen „Phasen"). a3 3
Die Amplitude (Tonstärke) des Obertones ist bedeutend.

Beispiel 8 (Bild 5 und 6):

Kurve a 2 und Schablone 3 (mit verschiedenen „Phasen"). a2 3

Beispiel 9 (Bild 5 und 6):

Kurve a 1 und Schablone 3 (mit verschiedenen „Phasen"). a1 3
Oberton mit geringfügiger Amplitude!
Anmerkung: Bild 5 und 6 zeigt zu den Beispielen 7, 8, 9 zwei Phaseneinstellungen. Man versuche noch andere Einstellungen und betrachte jeweils alle drei Zusammensetzungen!

Man beachte: Vom Grundton (Schablone) sind drei volle Perioden sichtbar. Wir sehen aber, daß auch von allen Zusammensetzungen drei Perioden sichtbar sind!

Wir wollen dies bei einem anderen Oberton beobachten:

2. Grundton und zweiter Oberton (1 : 3).

Beispiel 10 (Bild 3 und 4):
a3 2 Kurve a 3 und Schablone 2.

Beispiel 11 (Bild 3 und 4):
a2 2 Kurve a 2 und Schablone 2.

Beispiel 12 (Bild 3 und 4):
a1 2 Kurve a 1 und Schablone 2.

Anmerkung: Wieder betrachte man mehrere „Phaseneinstellungen", nicht nur die in Bild 3 und 4 gezeigten.

Man beachte: Vom Grundton (Schablone) sind zwei volle Perioden sichtbar, ebenso von allen Zusammensetzungen!

Wir ersehen aus Beispiel 6 bis 12:

Die Periode und damit die Frequenz des Tones wird von den Obertönen nicht beeinflußt.

Für die Klangfarbe heißt das:

Die Tonhöhe wird durch die Obertöne nicht geändert!

Da die Phase bei Zusammensetzungen die Klangempfindung nicht beeinflußt, gilt dies auch bei Obertönen. Selbstverständlich gilt dies nicht von der Amplitude des Obertones im Verhältnis zu der des Grundtones.

Die Beispiele haben gezeigt, wie sehr das Bild der Zusammensetzung von der Amplitude des Obertones beeinflußt wird. Bei Überlagerungen mit a 3 sticht der Oberton deutlich hervor. Bei den Überlagerungen mit a 2 schon weniger, und die Kurve a 1, deren Wellenform aus größerer Entfernung in der Grundstellung der Streifenserie kaum mehr zu erkennen ist, wirkt bei Überlagerungen eigenartig: Die Periode des Obertones ist kaum zu erkennen, deutlich und aus großer Entfernung ist dennoch der Einfluß auf den Grundton zu erkennen! Am auffallendsten ist in Bild 3 die deutliche Annäherung an eine **„Dreieckschwingung"** (wir kommen in § 8, Beispiel 42 darauf zurück!).

Durch die Vorführung wird verständlich gemacht:

Die Klangfarbe eines Tones wird durch die Obertöne bestimmt. Der Einfluß eines Obertones ist dabei umso stärker, je größer seine Amplitude ist.

d) Schwebung.

Schwebungen sind Erscheinungen, die bei der Überlagerung (Interferenz) von Schwingungen entstehen, deren Frequenzen sich nur wenig unterscheiden.
Als Beispiele zeigen wir Überlagerungen von Schwingungen im Frequenzverhältnis 5 : 6.

Beispiel 13 (Bild 7, 8, 9)
Kurve a 3 und Schablone 5 (mit verschiedenen Phasen). a3 5

Beispiel 14 (Bild 7, 8, 9)
Kurve a 2 und Schablone 5. a2 5

Beispiel 15a (Bild 7, 8, 9)
Kurve a 1 und Schablone 5. a1 5

Besprechung der Beispiele 13, 14, 15a:

In Beispiel 13 ist die Amplitude der höherfrequenten Schwingung größer als die Amplitude der anderen Schwingung. Wir gewinnen aus dem Bilde den Eindruck einer Schwingung, deren Amplitude zu und abnimmt. Im Bereiche der Schallwellen kann man dies als Ton mit schwankender Tonstärke hören. Im Bereiche der viel höher frequenten elektrischen Schwingungen können wir es auch hören: als schwankenden (stoßweisen) Empfang bei der „Interferenz" (d. h. Überlagerung) zweier Sender mit sehr naher Frequenz. In Beispiel 14 sind die Amplituden beider Teilschwingungen gleich. Die Überlagerung zeigt eine Schwingung, die stellenweise „verschwindet". Der Überlagerung läßt sich in diesem Falle eine „Modulationsschwingung" umschreiben, die in Beilage I auf Transparentplatte gezeichnet ist und auf die Streifen gelegt werden kann. Im Mittelstreifen muß bei Bild 7 der Ausschlag 0, bei Bild 9 der maximale Ausschlag 0,4 angelegt werden.

In Beispiel 15a sieht man wieder, daß der Einfluß der für sich betrachteten geringfügigen Schwingung a 1 in der Zusammensetzung doch beträchtlich ist.

e) Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz.

Beispiel 16 (Bild 3 und 4):
Kurve a 4 und Schablone 2 (mit verschiedenen Phasen) Wir sehen, daß die Über- a4 2
lagerungen dieser beiden „harmonischen" Schwingungen gleicher Frequenz für jede „Phase" wieder eine „harmonische Schwingung" gleicher Frequenz ist, allerdings mit stets anderer Amplitude. Die Bilder 3 und 4 zeigen die Grenzfälle mit der verdoppelten Amplitude und der Amplitude Null. (Sind die Amplituden der Teilschwingungen nicht gleich, so haben die Grenzfälle als Amplituden die Summe bzw. die Differenz der Teilamplituden.)

Anmerkung: Der rechnerische Zusammenhang zwischen der Phase der Schablone und der Amplitude der Überlagerung wird in Teil B besprochen.

f) Wanderwellen.

Beispiel 6 (Bild 16) zeigt etappenweise die Überlagerung zweier „Wanderwellen". Daß bei unsrer Vorführung eine der beiden Wellen „ruht", hat nichts zu bedeuten, wichtig ist, daß sich die beiden Wellen im Verhältnis zueinander bewegen.

Siehe die Erläuterung zu „Wanderwellen" in Teil B.

Auf demselben Gedanken beruht die Vorführung der „stehenden Welle" auf Grund der eben in Punkt e) erwähnten Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz. (Siehe Teil B „Funktionenschieber als Sinuslinien-Zeichengerät").

g) Überlagerung von drei Schwingungen.

In § 9 und § 10 werden Überlagerungen dreier Schwingungen gezeigt. Eine rein bildmäßige Vorführung der dort angeführten Beispiele (ohne Beachtung der Funktionsgleichungen usw.) hat immerhin den Wert, von der Vielfalt der Überlagerungsmöglichkeiten einen Begriff zu geben. Die zum Teil bizarren Kurven vertiefen den Eindruck und helfen, die Erinnerungen an die Vorführungen dauerhafter zu machen.

Ergänzungen:

Beispiel 1 zeigte eine Zusammensetzung mit Quintintervall, wobei nur eine Periode sichtbar war. Wir können auch Zusammensetzungen im Quintintervall zeigen, bei denen zwei Perioden sichtbar sind:

Beispiel 15 b (Bild 1)

a1 4 Kurven a 1, a 2 und a 3, Schablone 4 (mit verschiedenen Phasen). Wir sehen
a2 selbst bei Frequenzverhältnis 2:3 noch deutlich die Erscheinung der „Schwebung"
a3

Reizvoll und lehrreich ist es, wie in Bild 16 zu Beispiel 6 zu anderen Beispielen aufeinanderfolgende Bilder auf Transparentpapier zu pausen (etwa zu Beispiel 3, 4, 5).

§ 4 Elementare Flächenverwandlungen.

b3 Die Streifenfläche b (Bild 10) zeigt ein **Dreieck** (b 3), ein **Rechteck** (b 4), ein
b4 **Trapez** (b 5), eine **Kreisfläche** (vom schwarzen Kreis b 6 begrenzt) . . . . .
b5 Alle diese ebenen Figuren zerfallen durch die Streifenteilung der Streifenebene
b6 in schmale Flächenstreifen (bei Dreieck, Rechteck und Trapez sind die Streifen rot angelegt). Der Flächeninhalt aller dieser ebenen Figuren ist gleich der Summe ihrer Flächenstreifen.

Überlagern wir nun der Streifenfläche den Stab (mit beliebiger Steigung) oder eine unserer Schablonen (mit beliebiger Phase), so ändern die genannten ebenen Figuren ihre Gestalt. Wir zeigen dies etwa durch Stabüberlagerungen mit
1 + 0,5 (Bild 11) und — 0,5 (Bild 12) und durch einige Schablonenüberlagerungen
2 (etwa 2 oder 5 zu empfehlen). Die einzelnen rot angelegten (oder beim Kreis
5 von den schwarzen Punkten begrenzten) Flächenstreifen haben sich dabei nur verschoben, also nicht in ihrer Fläche geändert. Daraus folgt, daß die veränderten Figuren mit den ursprünglichen Figuren flächengleich sind!

Wir bezeichnen jede Veränderung der Streifenebene, die durch Überlagerung des Stabes oder einer Schablone (allgemein durch Überlagerung einer stetigen Funktion) bewirkt wird, eine „Schiebetransformation" der Ebene.

Wir können unsere Erläuterung also zusammenfassen in dem

Satz 1: **Der Flächeninhalt ebener Figuren wird durch eine Schiebetransformation der Ebene nicht geändert.**

Schöner wird dieser Satz durch folgende Formulierung ausgedrückt:

Satz 1': **Alle Schiebetransformationen sind flächentreu!**

Anmerkung: Ist eine Figur vor der Transformation durch eine stetige Kurve begrenzt, (vgl. etwa Rechteck b 4), so ist dies nach der Transformation nur mehr bei Betrachtung aus größerer Entfernung scheinbar der Fall. Tatsächlich müßte die Begrenzung jedes einzelnen Streifens geändert werden, damit b 4 etwa in Bild 11 ein Parallelogramm darstellt. Dem ist entgegen zu halten, daß man die Ebene viel feiner in Streifen zerlegen könnte. Die Zwischenstreifen würden bei der Transformation (Überlagerung) Zwischenlagen einnehmen und die Begrenzungspunkte würden sich ganz eng anschließen.

Anmerkung für höhere Vorbildung: Bezeichnet man die Streifenbreite mit $\triangle x$, so ergibt sich aus dem Grenzübergang $\triangle x \longrightarrow 0$ ein strenger Beweis der Flächengleichheit!

Aus Satz 1 ergibt sich als Folgesatz:

Satz 2: **Lassen sich zwei Figuren durch Schiebetransformation ineinander überführen, so sind sie flächengleich.**

Beispiele:

Anmerkung: Wir beschränken uns in diesem Paragraphen auf Beispiele von Flächenverwandlungen, die in der elementaren Geometrie von solcher Bedeutung sind, daß sie in jeder Schule, auch in Elementarschulen, eindringlich behandelt werden.

Beispiel 17 (Bild 10 bis 14):

Wir transformieren das **Dreieck b 3** durch Überlagerungen des Stabes (als „Scha- b3 1
blone" 1).

Die Dreieckseite, die in einem Streifen liegt (rechts), bezeichnen wir als **Grundlinie.** Die zugehörige **Höhe** ist sodann gleich dem Abstand der links liegenden Ecke des Dreiecks vom Streifen der Grundlinie. Diese Höhe kann sich bei einer Überlagerung (Schiebung) nicht ändern, der Streifen der Ecke und der Streifen der Grundlinie bleiben stets in gleicher Entfernung voneinander (es liegen ja immer gleich viele Streifen dazwischen).

Wir bezeichnen künftig die Steigung, die wir dem Stab mit Hilfe der Steigskalen geben, mit „k".

Wir beginnen mit $k = +1$ und verändern die Stabstellung fortlaufend (eine Fixierung mit der Klemme ist hierbei nicht nötig, wir halten den Stab mit der Hand). Es ist nötig, die Stellung einzelner Streifen durch Darüberstreichen mit den Fingern der freien Hand wiederholt zu korrigieren.

Das Dreieck zeigt sich bei:

$k = +1$ . . .	(Bild 13) . . .	rechtwinklig (rechter Winkel unten)
$+1 > k > 0{,}5$		spitzwinklig (unterer Winkel größer)
$k = +0{,}5$ . .	(Bild 11) . . .	gleichschenklig
$0{,}5 > k > 0$		spitzwinklig (oberer Winkel größer)
$k = 0$	(Bild 10) . . .	rechtwinklig (rechter Winkel oben)
k negativ . . .	(Bild 12,14) .	stumpfwinklig

Aus Satz 2 folgt also:

Satz 3: **Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.**

Satz 4: **Ein Dreieck geht in ein flächengleiches Dreieck über, wenn man eine Ecke parallel zur gegenüberliegenden Seite verschiebt.**

Anmerkung: Die Transformation in ein rechtwinkliges Dreieck, also in ein „halbes Rechteck", zeigt besonders einprägsam (also wertvoll für Elementarschulen) die Flächenformel für das Dreieck: $F = \frac{a \cdot h}{2}$

Beispiel 18 (Bild 10 bis 14):

Transformiere das **Rechteck b 4** durch Überlagerung des Stabes mit fortlaufender b4 1
Veränderung der Steigung!

Es folgt daraus:

Satz 5: **Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.**

Satz 6: **Ein Parallelogramm geht in ein flächengleiches Parallelogramm über, wenn man eine Seite in ihrer Geraden verschiebt.**

Da man durch eine solche Verschiebung stets ein Rechteck mit den Seiten g und h herstellen kann, folgt:

Satz 7: **Die Fläche eines Parallelogramms ist das Produkt einer Seite mit der zugehörigen Höhe.**

Beispiel 19 (Bild 10 bis 14):

b5 1 Transformiere ebenso das **Trapez b 5**! (ausgehend von $k = -1$!) Die Formveränderung durch die Transformation zeigt ein Vergleich der Stellungen $k = +0{,}5$ und $k = -1$ besonders einprägsam: (Bild 11 und 14).

Es folgt:

Satz 8: **Trapeze mit gleichen Parallelseiten und gleicher Höhe sind flächengleich.**

Satz 9: **Ein Trapez geht in ein flächengleiches Trapez über, wenn man eine Parallelseite in ihrer Geraden verschiebt.**

Die Verwandlung in ein rechtwinkliges Trapez erleichtert für Elementarschulen die einprägsame Herleitung der Flächenformel für das Trapez.

Beispiel 20 (Bild 10 bis 14):

b3 1 Transformiere das Dreieck b 3 fortlaufend mit dem Stabe und betrachte die schwarz eingetragene Verbindungslinie des Mittelpunktes der Grundlinie mit der gegenüberliegenden Ecke. In jeder Stellung gilt: Jeder „Streifen" des Dreiecks wird von dieser Linie halbiert, hat also seinen Schwerpunkt auf der Linie (man stelle sich die Linie als Kante, den „Streifen" als daraufgelegtes Stäbchen vor!). Da jeder einzelne Streifen im Gleichgewicht ist, so ist das ganze Dreieck im „Gleichgewicht". Daraus folgt:

Satz 10: **Die Verbindungsgerade eines Eckpunktes eines Dreieckes mit dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seite ist eine Schwerlinie des Dreiecks.**

Anmerkung: Die angeführten Flächenverwandlungen werden in jedem elementaren Geometriebuch besprochen (die Veranschaulichung mit dem Funktionenschieber wird deshalb sehr willkommen sein). Auffallenderweise wird in keinem Buche — auch nicht später bei Behandlung der Affinität — darauf hingewiesen, daß diese Transformationen besondere **Affinitäten** sind. (Siehe § 5)

§ 5 Die Ellipse als affine Figur des Kreises.

a) Stabüberlagerung als Affinität.

Bei den Beispielen des § 4 fällt auf, daß der Kreis der Musterfigur b 6 bei jeder Stabüberlagerung eine Form annimmt, die an eine Ellipse erinnert. Es ist auch eine Ellipse, denn bei jeder Stabüberlagerung sind Ausgangsfigur und Endfigur affin! Allerdings ist es eine besondere Affinität! b6 1

Eine **perspektive Affinität** in der Ebene ist eine Beziehung zwischen Figuren, bei der einer Geraden eindeutig eine Gerade und einem Punkte eindeutig ein Punkt entspricht, und bei der folgende Beziehungen gelten:

1. Alle Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte sind zueinander parallel (**„Affinitätsstrahlen"**).
2. Alle Schnittpunkte entsprechender Geraden liegen auf einer bestimmten Geraden (**„Affinitätsachse"**).

Eine Stabüberlagerung ist nun eine solche Affinität:

1. Die Strahlen in der Schieberichtung sind die Affinitätsstrahlen (denn Anfangslage und Endlage liegen auf demselben Streifen, d. h. Schiebestrahl).
2. Die Affinitätsachse ist die Parallele zu den Schiebestrahlen durch den Drehpunkt des Stabes. Wäre nämlich dort noch ein Streifen, so würde er sich nicht bewegen. Also bleibt der Schnittpunkt jeder Geraden mit dem Strahl bei der Überlagerung an seiner Stelle, das heißt, Anfangs- und Endlage der Geraden schneiden sich in diesem Punkt.

Nennen wir eine solche Affinität (weil sie mit dem Schieber gezeigt werden kann) eine **„Schiebeaffinität"**, so können wir kurz sagen:

Satz 1: **Eine Schiebeaffinität ist eine Affinität, bei der die Affinitätsachse zu den Affinitätsstrahlen parallel ist.**

Aus § 3, Satz 1, folgt:

Satz 2: **Die Schiebeaffinität ist die flächentreue Affinität.**

Anmerkung: In Teil B wird in einer Weise, die keine höheren Vorkenntnisse erfordert, als dieser Paragraph, gezeigt, wie man von der gewohnten „senkrechten Affinität" schrittweise zur Schiebeaffinität überleiten kann. Da im Teil A nur die wichtigsten Vorführungen übersichtlich zusammengestellt wurden, wird diese Erläuterung in Teil B verlegt.

b) Vorführungen:

Beispiel 21 (Bild 10, 11, 13):

Musterfigur b 6 und Stab! b6 1

Wir beachten in Figur b 6 (Ausgangsstellung, Bild 10) die Kreislinie, ein rotes und ein schwarzes Paar normaler Kreisdurchmesser und die Tangenten, die in den Endpunkten der schwarzen Durchmesser einseitig dünn aufgetragen sind, so daß Halbmesser und Tangenten ein Quadrat umschließen. Wir überlagern nun den Stab in kleinen Schritten mit immer größer werdender Steigung k. Bild 11 zeigt die Figur für $k = +0{,}5$, Bild 13 für $k = +1$.

b6 1 **Beispiel 22 (Bild 10, 12, 14):**

Wir beobachten nun die Figur ebenso für negatives k bis k = —1 (Bild 14). Von besonderer Bedeutung ist hiebei die Stellung k = —0,5 (Bild 11), bei der die schwarzen Durchmesser wieder wie beim Kreis zueinander normal sind.

Mit diesen Vorführungen kann man anschaulich zeigen:

1. **Konjugierten Ellipsendurchmessern entsprechen normale Kreisdurchmesser.**
2. **Konjugierte Ellipsendurchmesser sind im allgemeinen n i c h t zu einander normal** (siehe insbesondere Beispiel 21).
3. **Die Achsen der Ellipse sind auch ein Paar konjugierter Durchmesser, und zwar der längste und der kürzeste. Sie sind zueinander normal** (Beispiel 22, k = —0,5, Bild 12).
4. **Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind zum konjugierten Durchmesser parallel:** das zu Beispiel 21 erwähnte Quadrat wird in allen Stellungen zum Parallelogramm. Im Falle k = —0,5 wird es zum Rechteck (Rechteck der Halbachsen).
5. **Alle zu einem Durchmesser parallelen Sehnen werden vom konjugierten Durchmesser halbiert:** In der Grundstellung (Bild 10) halbiert der horizontale rote Durchmesser alle vertikalen Sehnen. Ebenso halbiert in allen Stellungen der entsprechende rote Durchmesser die vertikalen Ellipsensehnen (Sehnen auf den Streifen).
6. **Der Flächeninhalt einer Ellipse ist: $F = a \cdot b \cdot \pi$.**

   Aus Satz 2 folgt:

   a) Die Ellipse in Bild 12 ist mit dem Kreis in Bild 10 flächengleich, also $F = r^2\pi$.

   b) Das Rechteck $a \cdot b$ in Bild 12 ist mit dem Quadrat $r \cdot r = r^2$ in Bild 10 flächengleich, also $r^2 = a \cdot b$.

   Also ist die Ellipsenfläche: $F = r^2 \pi = a \cdot b \cdot \pi$.
7. (Für höhere Lehranstalten) **Der Flächeninhalt einer Ellipse mit den konjugierten Halbmessern c und d, die den Winkel φ einschließen, ist: $F = c \cdot d \cdot \pi \cdot \sin\varphi$.** Begründung wie unter 6.: Dem Rechteck $a \cdot b$ entspricht in allgemeiner Lage das Parallelogramm mit der Fläche $F' = c \cdot d \cdot \sin\varphi$, also ist $a \cdot b = c \cdot d \cdot \sin\varphi$.

b6 1 **Beispiel 23 (Bild 10 und 12):**

In der Stellung k = —0,5 (Bild 12) sehen wir der großen schwarzen Ellipse den kleinen Scheitelkrümmungskreis eingezeichnet (prüfe mit der allgemein bekannten Konstruktion nach!). Es ist dies der kleinere stärker aufgetragene rote Kreis der Figur. Führt man nun die Streifenserie in die Grundstellung zurück (Bild 10), so tauschen die Kurven ihre Rolle. Der schwarze Kreis ist der große Scheitelkrümmungskreis der kleinen roten Ellipse! (prüfe wieder nach!).

Die Scheitelkrümmungskreise werden zur raschen Zeichnung von Ellipsen allgemein verwendet, meist ohne einen Beweis oder auch nur eine Erklärung bringen zu können, da hiezu die nötigen Vorkenntnisse fehlen. Es ist daher gewiß von Wert, den Schülern zumindest zeigen zu können, daß sich Ellipse und kleiner Scheitelkrümmungskreis ebenso „intensiv" berühren, wie Ellipse und großer Scheitelkrümmungskreis.

Anmerkungen zu § 4 und § 5:

1. Wir sehen, daß die bekannten elementaren Flächenverwandlungen einen Sonderfall der Affinität darstellen. (Wir haben in § 4 dieselben Stabüberlagerungen wie in § 5!) Darauf wird in Planimetriebüchern kaum je hingewiesen.

2. Wir haben in der Schiebeaffinität eine Transformation der Ebene kennengelernt, die wir ohne räumliche Hilfsmittel (wie etwa Projektion etc.) als fortlaufende, stetige Transformation vorführen können.
3. Die Schiebeaffinität ist einfacher zu handhaben, als jede andere Affinität. (Siehe Teil B.) Sie wäre daher geeignet, als Einführung in die konstruktive Behandlung einer beliebigen Affinität bzw. Kollineation zu dienen. Die Vorführbarkeit mit dem Funktionenschieber ist dabei von besonderem Wert!
4. Die Schiebeaffinität gestattet einfache und auf einheitlichem Grundgedanken beruhende Konstruktionen von Krümmungsmittelpunkten bei allen Kegelschnitten (siehe Teil B) und ermöglicht interessante Kegelschnittskonstruktionen, auf die in der Anleitung nicht eingegangen werden kann. Geometrisch interessierte Benützer des Funktionenschiebers mögen es nicht versäumen, den Abschnitt „Flächentreue Transformationen" des Teiles B zu beachten.

§ 6 Quadratische Funktion und Gleichung.

Vorbemerkung: Das Bild der quadratischen Funktion ist von so grundlegender Bedeutung, daß die Darstellung ihres Funktionsbildes ein selbstverständlicher Bestandteil des Mathematikunterrichtes sein muß.

Die quadratische Gleichung ist relativ leicht durch Rechnung zu lösen. Ihre graphische Lösung ist daher **praktisch** nicht von großer Bedeutung (sie dient nur zur raschen Ermittlung von Näherungswerten).

Pädagogisch ist die graphische Lösung der quadratischen Gleichung von sehr großer Bedeutung als Vorübung zur graphischen Lösung höherer algebraischer Gleichungen bzw. transzendenter Gleichungen, da sie:

1. besonders klar und instruktiv alle wichtigen Fälle zeigt (reelle Wurzeln, Doppelwurzel, keine reelle Wurzel).
2. zum selben Beispiel den Vergleich der rechnerischen und graphischen Lösung gestattet und damit dem Studierenden einen deutlichen Maßstab für die Genauigkeit der graphischen Methode gibt.

a) Die Funktion $y = x^2$ (Bild 10, Kurve b 1).

Die Funktion ist mit der **Einheitsstrecke e = 5 cm** als Kurve b 1 dargestellt. b1
Die Bildkurve ist eine Parabel mit dem Halbparameter $p = \frac{1}{2}$. (Abstand des Brennpunktes vom Scheitel: $\frac{p}{2} = \frac{1}{4}$)

Nachweis:

$$\overline{PL} = y + \frac{1}{4} = x^2 + \frac{1}{4}$$

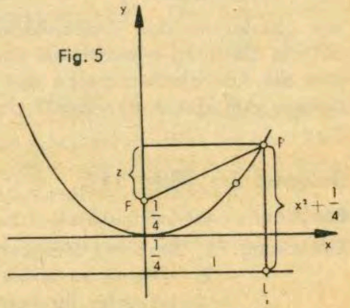
$$\overline{PF} = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}} = \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}}$$

$$= \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = x^2 + \frac{1}{4}$$

also $\overline{PF} = \overline{PL}$.

Fig. 5



Der Scheitel der Parabel ist der Ursprung des Koordinatensystems. Setzen wir den Läufer auf, so können wir ihn so einstellen, daß sich der Ursprung des Koordinatensystems der Koordinatenscheibe mit dem Parabelscheitel deckt. Wir können sodann zu jedem **„Argumentenwert"** x den **„Funktionswert"** y aus dem Koordinatensystem ablesen (Achse x_0 in Bild 10).

Anmerkung: Um den Läufer bei aufgerichteter Stellung einstellen zu können, bringen wir die Streifenserie in „Hochstellung".

b1 b) Die Funktion $y = x^2 + b$ (Einstellung der x-Achse!).

Für $x = 0$ erhalten wir nun den Funktionswert $y_0 = b$! Wir müssen also den Läufer so einstellen, daß der Parabelscheitel (der Parabelpunkt auf der y-Achse) die Ordinate $y_0 = b$ erhält!

Beispiel 24 (Bild 10):

Funktion: $y = x^2 - 2{,}25$.
$y_0 = -2{,}25$, die x-Achse ist also 2,25 über dem Parabelscheitel einzustellen [Achse x (25) im Bild 10].

Beachte: Die Achse muß **über** dem Scheitel liegen, damit der Scheitel **unter** dem Ursprung liegt, also eine negative Ordinate hat!

c) Die rein quadratische Gleichung $x^2 + b = 0$.

Wir stellen die **Funktion** $y = x^2 + b$ dar. Der Schnittpunkt der Bildkurve dieser Funktion mit der x-Achse ist $y = 0$, also $x^2 + b = 0$. Die Abszissen dieser Schnittpunkte, die wir die **„Nullstellen"** der Funktion nennen, sind also die Wurzeln der Gleichung.

Beispiel 25 (Bild 10):

b1 **Gleichung:** $x^2 - 2{,}25 = 0$
Die Funktion $y = x^2 - 2{,}25$ haben wir in Beispiel 24 dargestellt. Als **Wurzeln** der Gleichung (Nullstellen der Funktion) lesen wir ab: $x_1 = -1{,}5$; $x_2 = +1{,}5$.

d) Die Funktion $y = x^2 + ax + b$.

Wir überlagern der Streifenfläche die Funktion $y = a\,x$, indem wir den Stab auf die Steigung a einstellen. Die y-Achse bleibt im Mittelstreifen, wir müssen also die Koordinatenscheibe des Läufers (ohne seitliche Verschiebung) so einstellen, daß der Kurvenpunkt des Mittelstreifens die Ordinate $y_0 = b$ erhält.

Beispiel 26 (Bild 11):

Funktion: $y = x^2 + 0{,}5\,x - 1{,}5$.
b1 1 **Einstellung:** 1. Stab mit Steigung $+0{,}5$ überlagern.
2. x-Achse so einstellen, daß der Kurvenpunkt des Mittelstreifens 1,5 unter ihr liegt [Achse x (26) im Bild 11].

Wir können nun aus der Koordinatenscheibe **Funktionswerte** ablesen:

x	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	1	1,5	2
y	-1,5	-1,56	-1,5	-1,36	-1	0	1,5	3,5

e) Die quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$.

Entsprechend zu d) gilt:
Die Nullstellen der Funktion $y = x^2 + a\,x + b$ ergeben die Wurzeln der Gleichung $x^2 + a\,x + b = 0$.

Beispiel 27 (Bild 11): b1 1

Gleichung: $x^2 + 0{,}5\,x - 1{,}5 = 0$.
Die entsprechende Funktion haben wir in Beispiel 26 dargestellt. Als Wurzeln lesen wir ab: $x_1 = -1{,}5$; $x_2 = 1$.

f) Diskussion zu d) und e).

Zeige an wechselnden Stabstellungen:

Die Parabel b 1 behält bei beliebiger Stabüberlagerung ihre Gestalt, sie wird nur seitlich verschoben.

Die Grenze der einstellbaren Stabüberlagerungen sind $+1$ bzw. -1. Wir können beobachten, daß hiebei der Scheitel bis $+0{,}5$ bzw. $-0{,}5$ seitlich „abwandert". Wir können also in der geschilderten Weise nur quadratische Funktionen bzw. Gleichungen einstellen, bei denen der Koeffizient des linearen Gliedes im Betrage nicht größer ist als 1.

Wir besprechen im Folgenden eine Methode, die uns:

1. von der genannten Einschränkung befreit,
2. als Vorübung für die kubische Funktion bzw. Gleichung dient.

g) „Phasenmethode" für quadratische Funktion bzw. Gleichung.

Beispiel 28 (Bild 10):

Gleichung: $x^2 + 2\,x - 0{,}96 = 0$.
Funktion: $y = x^2 + 2\,x - 0{,}96$.
Einstellung: 1. **„Phasenverschiebung des Achsensystems":** Die Koordinatenscheibe wird um $\frac{a}{2}$ (halber Koeffizient des linearen Gliedes) seitlich verschoben. Im Beispiel: $\frac{a}{2} = \frac{+2}{2} = +1$, also Verschiebung nach **rechts** (positive Richtung). Es wird dabei die y-Achse der Koordinatenscheibe auf die Marke $+1$ der „Phasenskala" auf dem Läuferrahmen eingestellt (diese Skala stimmt mit der Phasenskala des Schieberrahmens überein!) b1
2. Durch vertikale Schiebung des Läufers wird sodann die x-Achse so eingestellt, daß der Parabelpunkt auf der neuen y-Achse die Ordinate $y_0 = -0{,}96$ erhält.

Figur zur Einstellung: Bild 10, Achsen x (28), (y-Achse angedeutet).

Anmerkung: Der Name „Phasenverschiebung" und „Phasenmethode" wurde gewählt, weil die Verschiebung mit der „Phasenskala" eingestellt wird.

Als **Wurzeln** der Gleichung sind abzulesen: $x_1 = -2{,}4$,
$x_2 = +0{,}4$.

Beispiel 29 (Bild 10):

Gleichung: $x^2 - 4x + 1{,}44 = 0$.

Funktion: $y = x^2 - 4x + 1{,}44$.

b1 **Einstellung:** 1. **Phasenverschiebung des Achsensystems** $\frac{a}{2} = -2$ (nach links!)

2. Vertikaleinstellung $y_0 = +1{,}44$.

Figur zur Einstellung: Bild 10, strichpunktierte Achsen x (29), (y-Achse angedeutet).

Wurzeln der Gleichung: $x_1 = +0{,}4$; $x_2 = +3{,}6$.

Allgemein:

Gleichung: $x^2 + ax + b = 0$.

Funktion: $y = x^2 + ax + b$.

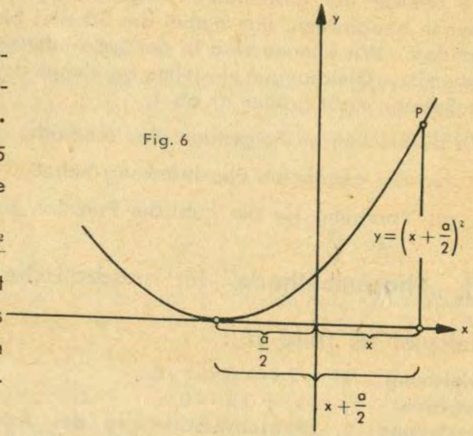
Einstellung: 1. Phasenverschiebung des Achsensystems: $\frac{a}{2}$ (positiv rechts, negativ links).

2. Vertikaleinstellung mit $y_0 = b$.

Begründung:

Durch die Verschiebung des Achsensystems um $\frac{a}{2}$ erhält der Parabelscheitel die Abszisse $-\frac{a}{2}$. Ein Vergleich von Fig. 6 mit Fig. 5 zeigt, daß damit die Parabel die Gleichung $y = (x + \frac{a}{2})^2$ erhält. Ausquadriert: $y = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ Bis auf das konstante Glied ist das die gewünschte Funktion. Das konstante Glied wird jedoch durch die Vertikaleinstellung mit y_0 automatisch berichtigt.

Fig. 6



h) Die charakteristischen Fälle quadratischer Gleichungen:

Eine quadratische Gleichung kann haben:

1. Zwei reelle Wurzeln (Beispiel 25, 27, 28, 29).
2. Eine reelle Doppelwurzel.
3. Keine reelle Wurzel.

Beispiele zu 2. und 3.:

b1 **Beispiel 30:**

Gleichung: $x^2 - 2{,}6x + 1{,}69 = 0$.

Funktion: $y = x^2 - 2{,}6x + 1{,}69$.

Einstellung: $\frac{a}{2} = -1{,}3$; $y_0 = 1{,}69$.

Doppelwurzel: $x_{1,2} = +1{,}3$.

Beispiel 31:

Gleichung: $x^2 + 3x + 2{,}5$.

Funktion: $y = x^2 + 3x + 2{,}5$.

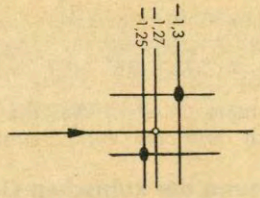
Einstellung: $\frac{a}{2} = +1{,}5$; $y_0 = 2{,}5$. b1

Der Parabelscheitel liegt 0,25 über der x-Achse! Kein Schnittpunkt, also **keine reelle Wurzel!**

Anmerkung: Die Methode liefert gegenüber der üblichen (Schnittpunkte von Parabel und Gerade) meist genauere Werte, insbesondere bei Doppelwurzel oder bei nahen Wurzeln, weil stets das Parabelstück mit der stärksten Krümmung ausgenützt wird (Doppelwurzel — Berührung im Scheitel!;.

Beachte: Fällt nach der Verschiebung die y-Achse nicht in eine Streifenmitte, dann erfolgt die Vertikaleinstellung mit sehr gutem Erfolg durch Interpolation mit Augenmaß. Fig. 7 zeigt in Vergrößerung etwa eine Einstellung für die Phasenverschiebung 1,27.

Fig. 7



Bezugspunkt für Vertikaleinstellung

§ 7 Kubische Funktion und Gleichung (Phasenmethode)

a) Verkürzung der y-Richtung

Die Funktion $y = x^3$ wird durch die „kubische Parabel" dargestellt, allerdings in einem Koordinatensystem, dessen y-Richtung auf ein Zehntel verkürzt wurde. Das heißt, **die x-Richtung hat 5 cm Einheit, die y-Richtung 0,5 cm.** Die Teilung der Koordinatenscheibe und der Steigskalen ist hiefür gut verwendbar, man muß nur beachten, daß jede **Ordinate** bzw. **Steigung** die **zehnfache Bedeutung** hat.

b) Die Methode.

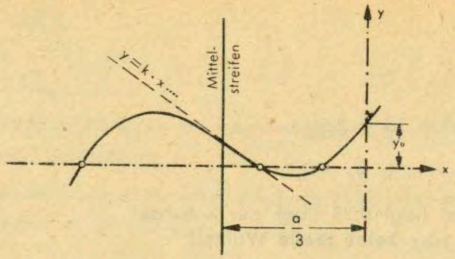
Darstellung der Funktion $y = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Einstellung: 1. Stabüberlagerung mit $k = b - \frac{a^2}{3}$. b2

2. Phasenverschiebung des Achsensystems um $\frac{a}{3}$.

3. Einstellung der x-Achse mit $y_0 = c$ (d. h., der Kurvenpunkt auf der verschobenen y-Achse muß die Ordinate $y_0 = c$ haben).

Fig. 8



Begründung:

Durch die Phasenverschiebung des Achsensystems um $\frac{a}{3}$ wird die Kurve b 2 zum Bild der Funktion $y = (x + \frac{a}{3})^3$, mit aufgelöster Klammer: $y = x^3 + a x^2 + \frac{a^2}{3} x + \frac{a^3}{27}$. Durch die Stabeinstellung ist dieser die von der Verschiebung unbeeinflußte lineare Funktion $y = (b - \frac{a^2}{3})\,x$ überlagert.

Wir können daraus die Gleichung der Überlagerung ermitteln:

erste Funktion:	$y = x^3 + a x^2 + \frac{a^2}{3} x + \frac{a^3}{27}$
zweite Funktion:	$y = (b - \frac{a^2}{3})\,x$
Gesamtfunktion:	$y = x^3 + a x^2 + b x + \frac{a^3}{27}$

Bis auf das konstante Glied ist dies die gewünschte Funktion! Das konstante Glied wird jedoch durch die Vertikaleinstellung mit y_0 automatisch berichtigt.

Graphische Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Die Wurzeln ergeben sich aus den Nullstellen der Funktion:
$y = x^3 + a x^2 + b x + c$.

Bemerkung zur Methode: Die geläufigen Methoden zur graphischen Lösung kubischer Gleichungen beziehen sich auf die „reduzierte kubische Gleichung“ (ohne quadratisches Glied). Im allgemeinen Falle ist also zunächst eine Transformation nötig, die bereits mehr Rechenarbeit erfordert, als die Einstellung auf dem Funktionenschieber! (Siehe die Beispiele!)

Anmerkung zur Berechnung von k:

$\frac{a}{3}$ muß für die Phasenverschiebung berechnet werden.

$\frac{a^2}{3}$ rechnet man sodann zweckmäßig als $a \cdot \frac{a}{3}$ (bei umständlichen Werten mit dem Rechenstab).

c) Beispiele.

Beispiel 32 (Bild 11):

Gleichung: $x^3 - 3 x^2 + 8 x - 20 = 0$.
Funktion: $y = x^3 - 3 x^2 + 8 x - 20$.
b2 1 **Einstellung:** 1. $k = 8 - 3 = 5$.
2. Phasenverschiebung: $\frac{a}{3} = -1$.
3. $y_0 = -20$.

Figur zur Einstellung: Bild 11, strichpunktierte Achsen x (32) und y (32).
Einzige reelle Wurzel: $x_1 = \mathbf{2{,}75}$ ($x_{2,3}$ komplex).

Beispiel 33 (Bild 12):

Gleichung: $x^3 - 3 x^2 - 2 x + 2 = 0$.
Funktion: $y = x^3 - 3 x^2 - 2 x + 2$.
Einstellung: 1. $k = -2 - 3 = \mathbf{-5}$. b2 1
2. $\frac{a}{3} = \mathbf{-1}$.
3. $y_0 = \mathbf{+2}$.

Figur: Bild 12, strichpunktierte Achsen x (33) und y (33).
Wurzeln: $x_1 = \mathbf{-1}$; $x_2 = \mathbf{+0{,}6}$; $x_3 = \mathbf{+3{,}4}$.
Anmerkung: die genauen Wurzeln sind: $x_1 = -1$; $x_2 = 2 - \sqrt{2}$; $x_3 = 2 + \sqrt{2}$.

Beispiel 34 (kein Bild):

Gleichung: $x^3 - 3{,}4 x^2 - 1{,}75 x + 10 = 0$.
Funktion: $y = x^3 - 3{,}4 x^2 - 1{,}75 x + 10$.
Einstellung: $\frac{a}{3} = \mathbf{-1{,}13}$; $k = -1{,}75 - 3{,}85 = \mathbf{-5{,}6}$; $y_0 = \mathbf{10}$. b2 1

Beachte bei der Einstellung:
Die y-Achse deckt sich hier mit keiner Streifenmitte. Die Vertikaleinstellung ist dennoch sehr genau möglich. Allerdings ist sie hier dadurch erleichtert, daß die Kurve an dieser Stelle fast horizontal verläuft. Vgl. auch Figur 7!
Wurzeln: $x_1 = -1{,}6$; $x_{2,3} = +2{,}5$ (Doppelwurzel).

Beispiel 35 (kein Bild):

Gleichung: $x^3 - 3{,}9 x^2 + 5{,}07 x - 2{,}197 = 0$.
Funktion: $y = x^3 - 3{,}9 x^2 + 5{,}07 x - 2{,}197$
Einstellung: $\frac{a}{3} = \mathbf{-1{,}3}$; $k = 5{,}07 - 5{,}07 = 0$ (keine Stabüberlagerung) b2 1
$y_0 = -2{,}197$.
Wurzeln: $x_{1,2,3} = \mathbf{1{,}3}$ **(Dreifachwurzel!)**

Beispiel 36 (kein Bild):

Gleichung: $x^3 + 1{,}5 x^2 - 7 x - 7{,}5 = 0$.
Funktion: $y = x^3 + 1{,}5 x^2 - 7 x - 7{,}5$.
Einstellung: $\frac{a}{3} = \mathbf{0{,}5}$ (positive Phasenverschiebung). b2 1
$k = -7 - 0{,}75 = \mathbf{-7{,}75}$; $y_0 = \mathbf{-7{,}5}$.
Wurzeln $x_1 = \mathbf{-3}$; $x_2 = \mathbf{-1}$; $x_3 = \mathbf{2{,}5}$.

d) Transformation bei nicht einstellbaren Fällen.

Ist bei einer Gleichung die Einstellung nicht möglich (weil $\frac{a}{3}$, k, oder y_0 im Betrage zu groß ist), so kann man die Gleichung durch eine einfache Transformation einstellbar machen:

Beispiel 37 (kein Bild):

Gleichung: $x^3 - 9 x^2 - 4 x + 36 = 0$.
Funktion: $y = x^3 - 9 x^2 - 4 x + 36$.

b2 1 **Einstellung:** $\frac{a}{3} = -3$; $k = -4 - 27 = -31$ (nicht einstellbar).
Wir setzen ein: $x = 2\bar{x}$ und erhalten: $8\bar{x}^3 - 36\bar{x}^2 - 8\bar{x} + 36 = 0 \mid : 8$.
Transformierte Gleichung: $\bar{x}^3 - 4{,}5\bar{x}^2 - \bar{x} + 4{,}5 = 0$.
Einstellung: $\frac{a}{3} = -1{,}5$; $k = -1 - 6{,}75 = -7{,}75$; $y_0 = 4{,}5$.
Wurzeln der transformierten Gleichung: $\bar{x}_1 = -1$; $\bar{x}_2 = +1$; $\bar{x}_3 = 4{,}5$.
Wurzeln der ursprünglichen Gleichung: $x_1 = -2$; $x_2 = +2$; $x_3 = 9$.

b2 1 **Beispiel 38 (kein Bild):**

Gleichung: $x^3 - 12x^2 + 400x - 4800 = 0$.
Man erkennt sogleich, daß für so große Koeffizienten keine Einstellung mehr möglich ist.

Wir setzen ein: $x = 10\bar{x}$ und erhalten:
$$1000\bar{x}^3 - 1200\bar{x}^2 + 4000\bar{x} - 4800 = 0 \;/ : 1000.$$
Transformierte Gleichung: $\bar{x}^3 - 1{,}2\bar{x}^2 + 4\bar{x} - 4{,}8 = 0$.
Einstellung: $\frac{a}{3} = 0{,}4$; $k = 4 - 0{,}48 = +3{,}52$; $y_0 = -4{,}8$.
Wurzeln der transformierten Gleichung: $\bar{x}_1 = 1{,}2$; $\bar{x}_{2,3}$ komplex.
Wurzeln der ursprünglichen Gleichung: $x_1 = 12$; $x_{2,3}$ komplex.

e) Korrektur graphisch bestimmter Wurzeln.

Es ist allgemein bekannt, wie graphisch bestimmte Wurzelwerte erprobt bzw. korrigiert werden. In § 9 wird der Vorgang an Hand einer transzendenten Gleichung besprochen.

§ 8 Funktionswerte transzendenter Summenfunktionen

a) Funktionsbedeutung der Musterkurven und Schablonen.

Bei der **Einheitsstrecke e = 5 cm** bedeuten:

Die Musterkurven:

a 1	$y = -\frac{1}{18}\sin 6x$
a 2	$y = -\frac{1}{5}\sin 6x$
a 3	$y = -\frac{2}{5}\sin 6x$
a 4	$y = \frac{1}{2}\sin 2x$
a 5	$y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$
a 6	$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x$
b 1	$y = x^2$
b 2	$y = \frac{x^3}{10}$

Die Schablonen:

	Phase 0	Phase φ (Hauptmarke)
2	$y = \frac{1}{2}\sin 2x$	$y = \frac{1}{2}\sin(2x - 2\varphi)$
3	$y = \frac{1}{3}\sin 3x$	$y = \frac{1}{3}\sin(3x - 3\varphi)$
4	$y = \frac{1}{4}\sin 4x$	$y = \frac{1}{4}\sin(4x - 4\varphi)$
5	$y = \frac{1}{5}\sin 5x$	$y = \frac{1}{5}\sin(5x - 5\varphi)$

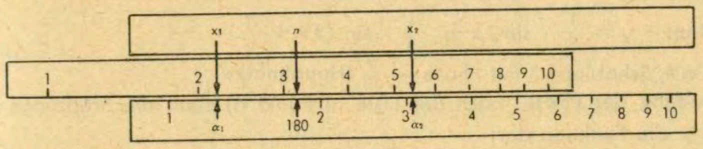
Anmerkung: Bedeutung der **Nebenmarken:**
Wird etwa bei Schablone 2 die Nebenmarke (+ cos) auf den Nullpunkt der Phasenskala eingestellt, so bedeutet die Schablone die Funktion: $y = \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$
Entsprechend für die anderen Nebenmarken bzw. Schablonen!

Beachte:

1. Bei Änderung der Einheitsstrecke ändert sich auch die Funktionsbedeutung einer Kurve bzw. Schablone. Die Verwendung anderer Einheiten wird in Teil B, besprochen. In Punkt c) dieses Paragraphen wird ein Beispiel angeführt.
2. Bei den Schwingungsfunktionen bedeutet x einen Winkel im Bogenmaße, also eine unbenannte Zahl. Die Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß erfolgt zweckmäßig mit dem Rechenstab mit Hilfe der Formeln:

$$x = \frac{\pi}{180^0}\alpha; \quad \alpha = \frac{180^0}{\pi} \cdot x; \quad \text{bzw. } x : \alpha = \pi : 180^0.$$

Fig. 9



Zu empfehlen ist ein Rechenstab System „Darmstadt", da dort die dezimale Unterteilung der Winkelskalen die Ablesung der Winkelfunktionen ohne Bestimmung der Minuten gestattet.

b) Summenfunktionen.

Für eine mit dem Funktionenschieber dargestellte Summenfunktion kann man die Funktionswerte am **Koordinatensystem des Läufers** ablesen.
Zur **Vertikaleinstellung** (Einstellung der x-Achse) verwendet man zweckmäßig den **Funktionswert y_0 an der Stelle $x = 0$.**
(In besonderen Fällen, etwa wenn y_0 nicht reell, oder nicht endlich ist, den Funktionswert an einer anderen Stelle. Solche Fälle treten in Teil A nicht auf).

Beispiel 39 (Bild 9):

Funktion: $y = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{5}\sin 5x + 0{,}65$. a4 5
Kurve a 4, Schablone 5 (Nebenmarke [— sin]); $y_0 = +0{,}65$.
Figur: **Bild 9, Achse x (39).**

Als Funktionswerte können wir z. B. ablesen:

x	−2	−1,7	−1,5	−1	−0,9	−0,8	−0,5
y	0,92	0,94	0,77	0,00	−0,03	0,00	0,35

x	0	0,5	0,9	1	1,25	2,6	2,7
y	0,65	0,95	1,33	1,30	1,00	0,17	0,10

Beachte:

Bei transzendeten Funktionen ist y_0 nicht immer gleich dem absoluten Glied! Für $x = 0$ sind nämlich die Funktionswerte der Teilfunktionen (etwa beim Kosinus!) nicht durchwegs Null!

Beispiel 40 (Bild 8):

Funktion: $y = 0{,}5 \sin 2x + 0{,}2 \cos 5x + 0{,}2.$

a 4 5 Kurve a 4, Schablone 5 (Nebenmarke [+ cos]), $y_0 = 0 + 0{,}2 + 0{,}2 = \mathbf{0{,}4}$.

Figur: **Bild 8, Achse x (40).**

Beispiele von abgelesenen Funktionswerten:

x	−2	−1,65	−1,5	−1,15	−1	−0,5	−0,25	0	0,25	0,5
y	0,40	0,20	0,20	0,00	−0,20	−0,40	0,02	0,4	0,50	0,45

x	1	1,15	1,5	1,65	2
y	0,70	0,75	0,34	0,04	−0,35

Beispiel 41:

Funktion: $y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3} \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3}$

a 4 3 Kurve a 4, Schablone 3 mit Phase $-\frac{\pi}{18}$ (Hauptmarke)

Begründung der Phase: nach der Liste in Punkt a) stellt die Schablone 3 bei Phase φ die Funktion dar:

$$y = \frac{1}{3} \cdot \sin(3x - 3\varphi).$$

Bei Phase $-\frac{\pi}{18}$ demnach die Funktion:

$$y = \frac{1}{3} \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Vertikaleinstellung: $y_0 = \frac{1}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}.$

Verallgemeinerung:

Die Liste in Punkt a) (für Schablonen) können wir zusammenfassen in der Formulierung:

Die Schablone „n" stellt bei Phase φ die Funktion dar:

$$y = \frac{1}{n} \cdot \sin(n \cdot x - n \cdot \varphi).$$

Anders ausgedrückt:

Die Funktion $\quad y = \frac{1}{n} \cdot \sin(n \cdot x - C)$

wird durch Schablone „n" mit Phase $\varphi = \frac{C}{n}$ dargestellt.

Daraus folgt:

Mit derselben Kurve und derselben Schablone können unendlich viele Funktionen dargestellt werden.

Variierbar ist hierbei: 1. die Phase der Schablone,
2. die Vertikaleinstellung.

Zur Übung können z. B. sämtliche Einstellungen von § 3 verwendet werden (mit beliebiger Vertikaleinstellung, d. h. mit beliebiger additiver Konstante der Funktion).

Die folgende Übersicht stellt die Möglichkeiten für Überlagerungen der Musterkurve a 4 mit den Musterschablonen zusammen. Anschließend an den allgemeinen Fall sind jeweils Einzelfälle angeführt. Die erste Spalte gibt die Nummern zugehöriger Beispiele an.

Überlagerungen mit Musterkurve a 4:

Beispiel	Bild	Schabl.	Phase	Funktion	
16	3, 4	2	$\frac{C_1}{2}$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x - C_1) + C_2$	a4 2
	3		0	$y = \sin 2x$	
	4		$\frac{\pi}{2}$	$y = 0$	
	5, 6	3	$\frac{C_1}{3}$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x - C_1) + C_2$	a4 3
1	5		0	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3} \cdot \sin 3x$	
2	6		$-\frac{\pi}{6}$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3} \cdot \cos 3x$	
41, 46			$-\frac{\pi}{18}$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3} \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3}$	
6	16	4	$\frac{C_1}{4}$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cdot \sin(4x - C_1) + C_2$	a4 4
6	16		$\pm\frac{\pi}{4}$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x - \frac{1}{4} \cdot \sin 4x$	
6, 47	16		$-\frac{\pi}{8}$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cdot \cos 4x + 0{,}5$	
6	16		$+\frac{\pi}{8}$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x - \frac{1}{4} \cdot \cos 4x$	
	7, 8, 9	5	$\frac{C_1}{5}$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{5} \cdot \sin(5x - C_1) + C_2$	a4 5
3	7		0	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{5} \cdot \sin 5x$	
4, 40, 45	8		$-0{,}314$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{5} \cdot \cos 5x + 0{,}2$	
5, 39, 44	9		$-0{,}628$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x - \frac{1}{5} \cdot \sin 5x + 0{,}65$	
		1	$k = C_1$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + C_1 \cdot x + C_2$	a4 1
43	Fig. 10		$k = 0{,}5$	$y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}$	

c) Ein Beispiel mit anderer Einheit.

Für die Verwendung anderer Einheiten, die in Teil B der Anleitung ausführlich besprochen wird, sei nur ein Beispiel angedeutet:

Beispiel 42 (Bild 3):

Bedeutung von a 1 in Bild 3 bei 2,5 cm Einheitsstrecke.

Bei 2,5 cm Einheitsstrecke stellt dar:

a 1 2 Musterkurve a 1 . . . . Funktion: $y = -\frac{1}{9} \cdot \sin 3x$

Schablone 2 . . . . Funktion: $y = \sin x$

Die Summenfunktion ist also: $y = \sin x - \frac{1}{9} \cdot \sin 3x$

Es sind dies zwei Glieder der „Fourier-Reihe":

$$y = \sin x - \frac{1}{3^2} \cdot \sin 3x + \frac{1}{5^2} \cdot \sin 5x - \frac{1}{7^2} \cdot \sin 7x + \ldots .$$

Jedes Glied dieser Reihe verbessert die Annäherung an eine „Dreieckschwingung" (siehe Diskussion zu § 3, Beispiel 12, S. 14).

§ 9 Transzendente Gleichungen.

Vorbemerkung: Während die Funktionsbilder, die bisher gezeigt wurden, ohne Funktionenschieber schon recht mühsam in gleichwertiger Genauigkeit herzustellen wären, könnte man die transzendenten Gleichungen dieses Paragraphen noch relativ leicht durch Schnitt zweier Kurven graphisch ohne Schieber lösen. Bei den Beispielen des § 10 ff wird jedoch die Leistung des Schiebers entscheiden.

In diesem Paragraphen soll nur der Vorgang erläutert werden. Dies geschieht absichtlich an einem Beispiel, das zwar theoretisch einfach ist (nur ein Glied transzendent), bei dem jedoch zwei Wurzeln durch sehr ungünstigen Schnitt erhalten werden. (Dies ergäbe sich ebenso bei graphischer Lösung des Beispiels ohne Schieber!).

a) Vorgang (Musterbeispiel).

Als bekannt darf vorausgesetzt werden:
Die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ erhält man als Abszissen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ der Schnittpunkte der Kurve $y = f(x)$ mit der x-Achse (als Nullstellen der Funktion $y = f(x)$)

Anmerkung: Man bringt zuerst zweckmäßig $f(x)$ durch Multiplikation mit einem Faktor möglichst in eine Form, welche die Verwendung aufgetragener Kurven oder vorhandener Schablonen gestattet.

Beispiel 43:

Bestimme die Wurzeln der **Gleichung:** $4 \sin 2x + 4x - 5 = 0$.

Da wir $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ als Kurve a 4 zur Verfügung haben, dividieren wir durch 8:

Gleichung: $\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} - \frac{5}{8} = 0.$

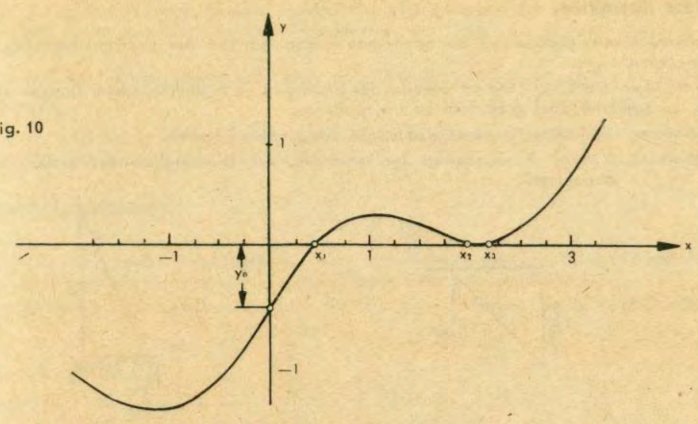
a 4 1 **Funktion:** $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}$

Wir überlagern also der Kurve a 4 mit dem Stab die Funktion $y = 0{,}5\,x$.

Die x-Achse wird mit $y_0 = -\frac{5}{8} = -0{,}625$ eingestellt.

In Fig. 10 ist ein Teil der Kurve mit den Nullstellen gezeichnet.

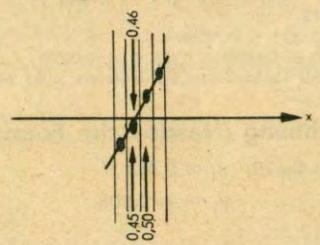
Fig. 10



Als erste **Wurzel** lesen wir ab: $\mathbf{x_1 = 0{,}45}$.

Anmerkung: Verbindet man die Mitten benachbarter „Punkte" der Kurven, so ist meist eine genauere Abschätzung der Wurzel möglich: $x_1 = 0{,}46$

Fig. 11



Korrektur des abgelesenen Wertes der Wurzel.

1. Ohne Differentialrechnung.

Wir bestimmen zu $x_1 = 0{,}45$ den Funktionswert y_1, wobei wir zunächst nicht sehr genau rechnen. a 4 1

Anmerkung: Bei $\sin 2x$ bedeutet $2x$ einen Winkel im Bogenmaß, der mit Rechenstab oder Bogentabelle in Gradmaß umgerechnet wird. Siehe § 8, S. 29.

$\sin 2x_1 = \sin 0{,}9 = \sin 51^0 34' = 0{,}783.$
$y_1 = 0{,}392 + 0{,}225 - 0{,}625 = 0{,}617 - 0{,}625 = \mathbf{-0{,}008}.$

Da wir einen negativen Funktionswert erhalten, lehrt uns das Funktionsbild (steigend!), daß der richtige Wurzelwert etwas größer sein muß. Da die Steigung etwa 1 ist, kann man sogar abschätzen, daß die Korrektur etwa dem erhaltenen Funktionswert entspricht, also rund 0,01 ist.

Der verbesserte Wert ist also: $\mathbf{x_1 = 0{,}46}$.

Funktionswert: $\sin 2x_1 = \sin 0{,}92 = \sin 52^0 42' 44'' = 0{,}7956.$
$y = 0{,}3978 + 0{,}23 - 0{,}625 = 0{,}6278 - 0{,}625 = +0{,}0028.$

Funktionswert positiv! Wurzel also zwischen 0,45 und 0,46 und zwar näher bei 0,46.

Also: **Wurzel auf zwei Dezimalen genau:** $x_1 = 0{,}46$.

Weitere Korrektur:

Ist größere Genauigkeit nötig, so kann man mechanisch mit der sogenannten „regula falsi" weiterrechnen.

Übersichtlicher, einfacher (und im Dienste der Erziehung zu mathematischem Denken wertvoller) ist es, zu schätzen oder graphisch zu interpolieren:

1. Anmerkung: Maßstäbe für beide Richtungen zweckmäßig gewählt.
2. Anmerkung: Zweiter Funktionswert (entsprechend der Genauigkeit des ersten) auf 0,003 abgekürzt.

Fig. 12

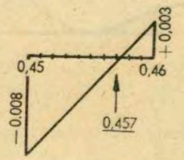
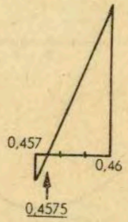


Fig. 13



Verbesserter Wert: $x_1 = \mathbf{0,457}$
$\sin 2x = \sin 0{,}914 = \sin 52^\circ\, 22'\, 6'' = 0{,}79195$
$y_1 = 0{,}39598 + 0{,}2285 - 0{,}625 = 0{,}62448 - 0{,}625 = -0{,}00052$
Verbesserter Wert: $x_1 = \mathbf{0,4575}$
$\sin 2x = \sin 0{,}915 = \sin 52^\circ\, 25'\, 33'' = 0{,}79256$
$y_1 = 0{,}39628 + 0{,}22875 - 0{,}625 = 0{,}62503 - 0{,}625 = +0{,}00003$
Eine genauere Korrektur ist mit fünfstelligen Zahlentafeln nicht mehr zu erreichen!

2. Mit Differentialrechnung (Newtonsche Formel).

$y = 0{,}5 \sin 2x + 0{,}5x - 0{,}625;\quad x_1 = 0{,}45.$
$y' = \cos 2x + 0{,}5 \qquad y_1 = -0{,}008.$
$y_1' = 0{,}622 + 0{,}5 = \sim 1{,}12.$

Verbesserter Wert: $\bar{x}_1 = x_1 - \dfrac{y_1}{y_1'} = 0{,}45 + \dfrac{0{,}008}{1{,}12} = 0{,}45 + 0{,}007.$

$\bar{x}_1 = 0{,}457;\quad \bar{y}_1 = -0{,}00052;\quad \bar{y}'_1 = 0{,}6106 + 0{,}5 = 1{,}1106.$

Verbesserter Wert: $\bar{\bar{x}}_1 = 0{,}457 + \dfrac{0{,}00052}{1{,}1106} = 0{,}457 + 0{,}00047.$

$\bar{\bar{x}}_1 = \mathbf{0{,}4575}.$

Die weiteren Wurzeln:

Das Funktionsbild sagt aus, daß es höchstens noch zwei Wurzeln geben kann. Diese liegen jedoch nahe einem Minimum und werden von der x-Achse sehr schleifend angeschnitten. Eine ganz geringfügige Änderung der Stab- oder Läufereinstellung bewirkt hier eine deutliche Änderung der Abszissenwerte.

Wir gehen nun so vor: Eine Parallele zur x-Achse, die noch deutlich einen Bogen abschneidet (etwa mit der Ordinate 0,1) läßt erkennen, daß der Abszissenwert des Minimums in der Mitte der Sehne, also bei 2,1 liegen muß. Wir versuchen nun bei der zweiten Wurzel mit irgend einem Wert, etwa 1,9 (Funktionswert + 0,02) und korrigieren:

$x_2 = 2 \qquad (y_2 = -0{,}0034) \qquad x_2 = 1{,}980 \quad (y_2 = 0{,}00003)$

Der dritte Wert liegt etwa symmetrisch zum zweiten bezüglich des Minimumwertes, also bei 2,2 ($y_3 = -0{,}001$)
$x_3 = 2{,}204$ ($y_3 = -0{,}00002$)

Die drei **Wurzeln** der Gleichung sind also:

$x_1 = \mathbf{0{,}4575};\quad x_2 = \mathbf{1{,}980};\quad x_3 = \mathbf{2{,}204}.$

Anmerkung: Ein genau bestimmter Funktionswert in einiger Nähe der Nullstellen gibt die Möglichkeit, die Einstellung des Läufers zu verbessern und damit die Wurzeln genauer abzulesen!

Kontrolle: Mit der Differentialrechnung erhält man als Minimum: $x = 2{,}09440$; $y = -0{,}0108$.

Anmerkung: Bei Vorführung vor größerem Publikum kann man an die x-Achse ein Lineal legen oder die x-Achse mit Glasschreiber stark nachziehen!

b) Übungsbeispiele.

Vorbemerkung: In § 8 wurde darauf hingewiesen, daß die Beispiele aus § 3 unerschöpfliche Möglichkeiten bieten, immer neue Beispiele von Summenfunktionen zu bilden. Jede dieser Funktionen dient zugleich zur graphischen Lösung einer transzendenten Gleichung.

Die folgenden wenigen Beispiele sollen nur für die ersten Versuche eine Kontrollmöglichkeit bieten.

Beispiel 44 (Bild 9):

Gleichung: $10 \cdot \sin 2x - 4 \cdot \sin 5x + 13 = 0 \;/ : 20.$
$0{,}5 \cdot \sin 2x - 0{,}2 \cdot \sin 5x + 0{,}65 = 0.$
Funktion: $y = 0{,}5 \cdot \sin 2x - 0{,}2 \cdot \sin 5x + 0{,}65.$ a4 5
Diese Funktion wurde in Beispiel 39 (S. 29) besprochen.
Abgelesene Wurzeln: $x_1 = \mathbf{-1}$; $x_2 = \mathbf{-0{,}8}$.
Verbesserte Werte: $x_1 = 1{,}0$; $x_2 = -0{,}80$.

Beachte: Bei einer periodischen Funktion wiederholen sich die Nullstellen in jeder Periode.
In diesem Falle ist die Periode 2π.
Allgemein geschrieben sind also die Wurzeln:
$x = -1 \pm 2n\pi;\qquad x = -0{,}8 \pm 2n\pi$ (n ganzzahlig!)

Beispiel 45 (Bild 8):

Gleichung: $5 \cdot \sin 2x + 2 \cdot \cos 5x + 2 = 0 \;/ : 10.$
$0{,}5 \cdot \sin 2x + 0{,}2 \cdot \cos 5x + 0{,}2 = 0.$
Funktion: $y = 0{,}5 \cdot \sin 2x + 0{,}2 \cdot \cos 5x + 0{,}2$ [Beispiel 40, S. 30] a4 5
Abgelesene Wurzeln: $x_1 = \mathbf{-1{,}15}$; $x_2 = \mathbf{-0{,}25}$; $x_3 = \mathbf{1{,}65}$; $x_4 = \mathbf{3{,}15}$.
Verbesserte Werte: $x_1 = -1{,}15$; $x_2 = -0{,}26$; $x_3 = 1{,}67$; $x_4 = 3{,}14$
(hiezu kommt jeweils $\pm 2n\pi$!).

Beispiel 46:

Gleichung: $\frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3} \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3} = 0.$
Funktion: $y = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3} \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3}$ [vgl. Beispiel 41, S. 30] a4 3
Abgelesene Wurzeln: $x_1 = \mathbf{-1{,}20}$; $x_2 = \mathbf{-0{,}25}$; $x_3 = \mathbf{1{,}65}$; $x_4 = \mathbf{1{,}85}$
(hiezu kommt jeweils $\pm 2n\pi$, da die Periode wieder 2π ist).

Beispiel 47 (Bild 16):

Gleichung: $2 \cdot \sin 2x + \cos 4x + 2 = 0 \;/ : 4.$
Funktion: $y = 0{,}5 \cdot \sin 2x + 0{,}25 \cos 4x + 0{,}5.$ a4 4
Figur: Siehe Bild 16, Kurve für Phase $-\frac{\pi}{8}$, Achse x (47), $y_0 = 0{,}75$.
Abgelesene Wurzeln: $x_1 = 2{,}05$; $x_2 = 2{,}65$.
Verbesserte Werte: $x_1 = 2{,}05$; $x_2 = 2{,}66$.
Periode diesmal nur π, also zu den Werten: $\pm n \cdot \pi$.

Beispiel 48:

Gleichung: $\sin 2x - 2x^2 + 1 = 0 \ / : -2.$
b1 2 **Funktion:** $y = x^2 - 0{,}5 \sin 2x - 0{,}5.$
Einstellung: Musterkurve b 1, Schablone 2, $y_0 = -0{,}5.$
Wurzeln (ohne Periode!): $x_1 = -0{,}39$; $x_2 = +0{,}98.$

Beispiel 49:

Gleichung: $5 \cdot \cos 2x - x^3 = 0 \ / : -10.$
b2 2 **Funktion:** $y = 0{,}1\, x^3 - 0{,}5 \cos 2x \quad (y_0 = -0{,}5).$
Wurzeln: $x_1 = -1{,}7$; $x_2 = -0{,}85$; $x_3 = +0{,}75.$

Beispiel 50:

Gleichung: $2 \cdot \sin 5x + 19 = 10 \cdot \sqrt{4 - x^2} \ / : -10.$
b2 5 **Funktion:** $y = \sqrt{4 - x^2} - 0{,}2 \cdot \sin 5x - 1{,}9.$
Der große Kreis in der Musterfigur b 6 hat die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ bzw. } y = \pm \sqrt{4 - x^2}.$$

Die Funktion $y = +\sqrt{4 - x^2}$ wird also durch die obere Hälfte des Kreises dargestellt.

Wir überlagern die Schablone 5 mit Nebenmarke (— sin) und stellen den Läufer mit $y_0 = 2 - 1{,}9 = +0{,}1$ ein.

Als Wurzeln lesen wir ab:
$x_1 = -0{,}65$; $x_2 = +0{,}1$; $x_3 = +0{,}65$; $x_4 = +1{,}05.$

Verbesserte Werte:
$x_1 = -0{,}63$; $x_2 = +0{,}10$; $x_3 = +0{,}63$; $x_4 = +1{,}03.$

Anmerkung: Wir können auch so vorgehen:
Funktion: $y = -\sqrt{4 - x^2} + 0{,}2 \cdot \sin 5x + 1{,}9.$
Wir verwenden nun die untere Hälfte des Kreises und überlagern die Schablone 5 mit der Phase 0 (Hauptmarke).
Vertikaleinstellung: $y = -2 + 1{,}9 = -0{,}1$
Als Wurzeln lesen wir dieselben Werte wie oben ab.

§ 10 Das Negativverfahren

Beispiel 51 (Bild 4 und 2):

2 Wir führen zunächst die Schablone 2 mit Marke „— sin" ein. Die Musterkurve
a4 a 4 erscheint sodann als Gerade (Bild 4). Wir nehmen nun an, wir hätten diese Gerade erst jetzt mit einem Lineal aufgetragen!

1 Bringen wir die Streifenserie in Hochstellung, so wird die Gerade zur Bildkurve der Funktion $y = +\frac{1}{2} \cdot \sin 2x$ (Bild 2)! Wir haben diese Funktion also dargestellt, indem wir der Streifenserie zuerst die **Funktion mit verkehrtem Vorzeichen** (deshalb **„Negativverfahren"!**), also $y = -\frac{1}{2} \cdot \sin 2x$ überlagerten, die Gerade auftrugen und die Schablonenüberlagerung aufhoben!

Wir wollen dieses Verfahren im nächsten Beispiel dazu verwenden, tatsächlich selbst eine Kurve aufzutragen:

Beispiel 52 (Bild 6 und 2):

Aufgabe: Das Bild der Funktion $y = -\frac{1}{3} \cos 3x$ auf die Streifenfläche aufzutragen.

Wir überlagern zunächst der Streifenserie im **„Negativverfahren"** die Funktion
mit verkehrtem Vorzeichen, also: $y = +\frac{1}{3} \cos 3x$ (Schablone 3, Marke + cos, 3
Bild 6).

Nun tragen wir mit einem Lineal (zweckmäßig mit dem Läuferrahmen!) eine horizontale Gerade auf. Wir legen sie durch den Einzelpunkt, der auf dem
Mittelstreifen unten aufgetragen ist (Linie a 8 in Bild 6). Wir verwenden hiezu a8
den beigegebenen roten Glasschreiber A. W. Faber/2251.

Bringen wir die Streifenserie in Hochstellung, so sehen wir das gewünschte 1
Funktionsbild aufgetragen (Kurve a 8 in Bild 2).

Beachte: Ist bei Vorführungen vor größerem Publikum ein starker Strich nötig, so erzielen wir ihn nicht durch starken Druck, sondern durch mehrmaliges Hin- und Herfahren mit mäßig aufgedrücktem Stift. Es stört das Bild nicht, daß sodann in Hochstellung die einzelnen Punkte „rechteckig" sind.

Die aufgetragene Kurve a 8 läßt sich wieder abwischen. Wir lassen sie jedoch stehen, da sie in den folgenden Beispielen noch verwendet wird.

Beispiel 53 (Bild 7):

Wir können die selbstaufgetragene Kurve a 8 zu Überlagerungen verwenden. a8
Wir erhalten z. B. Interferenzbilder mit Quartintervall (Frequenzverhältnis 3 : 4),
wenn wir die Schablone 4 einführen (mit verschiedenen Phasen). 4

Mit Schablone 5 erhalten wir Interferenzen mit großem Sextintervall (3 : 5) 5
(siehe Bild 7).

Mit Schablone 3 können wir Schwingungen gleicher Frequenz mit wechselnder 3
Amplitude darstellen (entsprechend Beispiel 16, § 3, Punkt e). Stellen wir z. B. die Schablone mit Marke — cos ein, so erhalten wir das Bild der Funktion: $y = -\frac{2}{3} \cos 3x.$

Allgemeine Folgerung:

> **Wir können die Überlagerung zweier Teilfunktionen durch Auftragen einer Geraden darstellen, wenn wir für beide Teilfunktionen Schablonen besitzen!**

Anmerkungen:

1. da auch im Negativverfahren jede Schablone mit beliebiger Phase eingeführt werden kann, ergibt sich daraus ein bedeutend erweiterter Anwendungsbereich, wenn man ohne vorgegebene Musterkurven arbeitet. Dieses selbständige Arbeiten wird in Teil B der Anleitung ausführlich besprochen.
2. die vielfältige Anwendung jeder Schablone macht die selbständige Anfertigung weiterer Schablonen für wichtige Grundfunktionen rentabel. Auch darauf geht Teil B ausführlich ein.

Beispiel 54 (Bild 6 und 2):

Entstehung der Musterkurve a 6.

Wir führen wie in Beispiel 52 die Schablone 3 mit Marke + cos ein (Bild 6). 3
Als unterste Kurve a 6 ist sodann das Bild der Funktion $y = \cos x$ aufgetragen, a6
wobei die in Beispiel 52 aufgetragene rote Gerade als x-Achse dient. a8

Bringen wir nun die Streifenserie in Hochstellung, so wird der roten Geraden 1
$y = -\frac{1}{3} \cos 3x$ überlagert. Da mit dem roten Punkt jeweils der ganze Streifen, also auch der schwarze Punkt der Kurve a 6 dieselbe Ordinatenverschiebung mitmacht, wird diesem Funktionsbild dieselbe Funktion überlagert wie der Geraden. Daraus folgt:

In Grundstellung (bzw. Hochstellung) ist die Musterkurve a 6 das Bild der Funktion:

$$y = \cos x - \frac{1}{3} \cdot \cos 3x$$

Wir haben damit bereits bei Grundstellung der Streifenserie eine **Überlagerung zweier Funktionen.** Durch Einführen einer Schablone können wir eine **dritte Funktion** überlagern!

Beispiel 55 (Bild 2 und 9):

Funktion: $y = \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{5} \sin 5x.$

a 6 5 Die Musterkurve a 6 wird zum Bild dieser Funktion, wenn wir die Schablone 5 mit der Marke — sin einführen (Bild 9).

Man beachte die bizarre Kurve! In der Differentialrechnung werden oft für allgemeine Überlegungen stetige Kurven skizziert mit Maxima, Minima und Wendepunkten in willkürlicher Lage. Da jedoch — Grundfunktionen ausgenommen — kaum Funktionsbilder gezeichnet werden, kann sich der Studierende wenig darunter vorstellen. Es wäre daher dringend nötig, allen Studierenden mit dem Funktionenschieber zu zeigen, daß schon die Summen dreier artverwandter Grundfunktionen einfachster Art so unregelmäßige, schwer überblickbare Bildkurven haben können. Man möge versuchen oder von den Studierenden selbst versuchen lassen, die Bildkurve durch graphische Überlagerung oder Auftragung errechneter Funktionswerte herzustellen. Der Versuch wird die Überlegenheit des Funktionenschiebers beweisen!

Beispiel 56 (Bild 3 und 2):

Entstehung der Musterkurve a 5.

a5 2 Wir führen die Schablone 2 mit Marke + sin (Hauptmarke) ein. Die Kurve a 5 erscheint sodann als Bild der Funktion:

$$y = \sin x \quad \text{(Bild 3).}$$

Wäre diese Kurve nicht schon gegeben, könnten wir sie als Bild einer einfachen Grundfunktion leicht auftragen (Funktionswerte könnte man z. B. vom Rechenstab abnehmen). Als Achse dient eine horizontale Gerade, die wir mit dem roten Glasschreiber fein andeuten wollen (x (56) in Bild 3).

1 Bringen wir die Streifenserie in Hochstellung, so wird dadurch nach dem Prinzip des Negativverfahrens die Funktion $y = -\frac{1}{2} \cdot \sin 2x$ überlagert (beobachte die aus der fein angedeuteten Achse entstehende Kurve!).
Daraus folgt:

In Grundstellung (bzw. Hochstellung) ist die Musterkurve a 5 das Bild der Funktion:
$y = \sin x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x.$

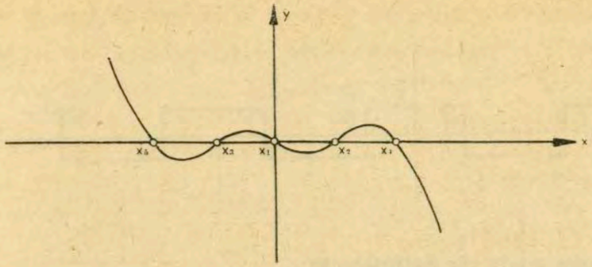
Beispiel 57:

Gleichung: $2 \cdot \sin x - \sin 2x = x.$

Funktion: $y = \sin x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x - 0{,}5 \cdot x.$

a5 1 Die Musterkurve a 5 wird zum Bild dieser Funktion, wenn wir den Stab mit der Steigung $k = -0{,}5$ überlagern.
Die Einstellung der x-Achse des Läufers erfolgt mit $y_0 = 0$.

Fig. 14



Wurzeln der Gleichung:
$x_1 = 0; \quad x_{2,3} = \pm 1{,}21; \quad x_{4,5} = \pm 2{,}38.$

Anmerkung: Wir können die Überlagerungen **dreier** Teilfunktionen durch Auftragen **einer** Teilfunktion darstellen, wenn wir für **zwei** Teilfunktionen Schablonen besitzen.

(Siehe Teil B der Anleitung).

§ 11 Fourier Reihen.

In diesem Paragraphen werden als besondere instruktive Beispiele **Fourier-Reihen** behandelt. Die weiteren Beispiele zu § 10 (zusammengesetzte Funktionen und transzendente Gleichungen) sind in § 12 zusammengefaßt.

In § 8, Punkt c), Beispiel 42 (Bild 3) wurde eine Fourier-Reihe erwähnt, bei der bereits zwei Glieder eine gute Annäherung zeigen. Da die Überlagerung zweier Teilfunktionen noch relativ leicht gezeichnet werden kann, wird dieses Beispiel gerne vorgeführt. Bei anderen, praktisch auftretenden Reihen vollzieht sich die Annäherung jedoch viel langsamer, und zwar desto zögernder, je weniger die Amplituden der Glieder abnehmen. Es ist notwendig, zu zeigen, daß die Annäherung bei hinreichender Gliederzahl in jedem Falle deutlich zu erkennen ist und es soll auch sichtbar werden, wie rasch (bzw. langsam) sie sich vollzieht. Dies ist nur mit dem Funktionenschieber mit überzeugender Wirkung möglich.

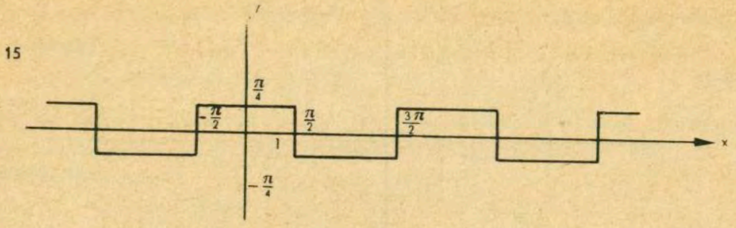
Der Funktionenschieber wird jedoch bei dieser Anwendung nicht nur dem Lehrenden eine wertvolle Hilfe bieten, sondern auch dem selbständig arbeitenden Mathematiker und Techniker als Kontrolle der errechneten Fourierkoeffizienten! (Man beachte die Anmerkung am Ende dieses Paragraphen!).

Beispiel 58 (Bild 6, 2 und 8):

Fourier-Reihe für die periodische Funktion mit der Periode:

$$f(x) = \begin{cases} +\frac{\pi}{4} \;\ldots\; -\frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4} \;\ldots\; \frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Fig. 15



Die Rechnung ergibt die **Entwicklung:**

$$y = \cos x - \frac{1}{3} \cdot \cos 3x + \frac{1}{5} \cdot \cos 5x - \frac{1}{7} \cdot \cos 7x + \ldots.$$

Um eine Vergleichsunterlage für die schrittweise Annäherung zu gewinnen, zeichne man die Rechteck-Kurve (Fig. 15) auf Transparentpapier oder mit Glasschreiber auf die Koordinatenscheibe (für 5 cm Einheitsstrecke).

Wir führen nun schrittweise vor:

	Einstellung:	Bild:	Funktion:
a6 3	Schabl. 3, Marke + cos	6	$y = \cos x$
1	Hochstellung	2	$y = \cos x - \frac{1}{3} \cdot \cos 3x$
5	Schabl. 5, Marke + cos	8	$y = \cos x - \frac{1}{3} \cdot \cos 3x + \frac{1}{5} \cdot \cos 5x$

Stellt man den Läufer ein mit $y_0 = 1 - 0{,}333 + 0{,}2 = 0{,}867$, so kann man die **Funktionswerte** ablesen [Achse x (58) im Bild 8]:

x	y	x	y	x	y
± 0,0	+ 0,87	± 1,1	+ 0,93	± 2,2	— 0,90
0,1	0,85	1,2	0,85	2,3	— 0,84
0,2	0,81	1,3	0,71	2,4	— 0,77
0,3	0,76	1,4	0,48	2,5	— 0,72
0,4	0,72	1,5	+ 0,21	2,6	— 0,69
0,5	0,69	1,6	— 0,09	2,7	— 0,70
0,6	0,70	1,7	— 0,38	2,8	— 0,74
0,7	0,75	1,8	— 0,62	2,9	— 0,79
0,8	0,81	1,9	— 0,80	3,0	— 0,84
0,9	0,88	2,0	— 0,90	3,1	— 0,86
1,0	0,93	2,1	— 0,93	3,2	— 0,86

Hat man die Fig. 15 auf die Koordinatenscheibe oder auf Transparentpapier aufgetragen, so kann man die „Abweichung" sichtbar machen. Besonders instruktiv wirkt es, wenn man die **„Abweichungsflächen"** mit Farbe anlegt (Bild 8).

Gegenüber der Reihe des Beispiels 42, § 8 (Amplituden der Glieder: $1^{-2} : 3^{-2} : 5^{-2} : 7^{-2}$ nehmen die Amplituden der Glieder in Beispiel 58 viel langsamer ab $1^{-1} : 3^{-1} : 5^{-1} : 7^{-1}$ Es ist deshalb die Verbesserung der Annäherung, die durch Hinzunahme eines Gliedes bewirkt wird, nicht mehr so augenfällig.

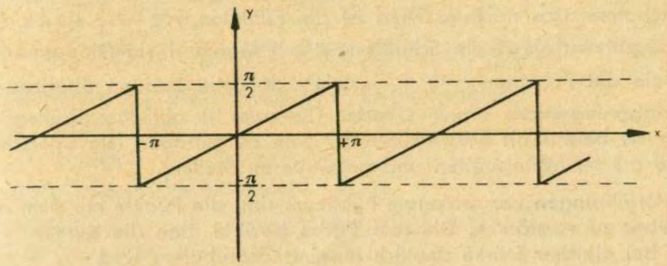
Mit Absicht wählen wir als nächstes Beispiel eine Reihe, bei der die Amplituden noch zögernder abnehmen $1^{-1} : 2^{-1} : 3^{-1} : 4^{-1} : 5^{-1} \ldots$).

Beispiel 59 (Bild 3, 2 und 5):

Fourier-Reihe für die periodische Funktion mit der Periode:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \ldots \quad -\pi \text{ bis } +\pi.$$

Fig. 16



Die Rechnung ergibt die **Entwicklung:**

$$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{6} \sin 6x + \ldots$$

Wir führen schrittweise vor:

Einstellung:	Bild:	Funktion:	
Schabl. 2, Marke + sin	3	$y = \sin x$	a5 2
Hochstellung	2	$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x$	1
Schabl. 3, Marke + sin	5	$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$	3

Läufereinstellung: $y_0 = 0$ (Achse x (59) in Bild 5).

Abgelesene **Funktionswerte:**

x	y	x	y	x	y
0,0	0,00	1,1	0,43	2,2	1,39
+ 0,1	0,10	1,2	0,45	2,3	1,44
0,2	0,19	1,3	0,48	2,4	1,44
0,3	0,27	1,4	0,53	2,5	1,39
0,4	0,34	1,5	0,60	2,6	1,29
0,5	0,39	1,6	0,70	2,7	1,14
0,6	0,42	1,7	0,81	2,8	0,94
0,7	0,44	1,8	0,94	2,9	0,69
0,8	0,44	1,9	1,07	3,0	0,42
0,9	0,44	2,0	1,20	3,1	+ 0,13
1,0	0,43	2,1	1,30	3,2	— 0,17

Die **Beilage II** auf Transparentplatte zeigt die durchgepauste Überlagerung und die **„Abweichungsflächen"** zwischen den Bildkurven der Summenfunktion der ersten drei Glieder der Reihe und der anzunähernden Funktion.

Die Reihe wird im folgenden Beispiel durch Hinzunahme weiterer Glieder weiterbehandelt!

Beispiel 60 (Bild 1, 2 und 7):

Funktion und Reihe wie in Beispiel 59!

Aufgabe: **Überlagerung weiterer Glieder!**

Das Ergebnis der Überlagerung dreier Glieder (Beispiel 59) ist in Beilage II festgehalten. Das nächste Glied ist die Funktion $y = -\frac{1}{4} \sin 4x$. Wir führen
4 im Negativverfahren die Schablone 4 mit Marke + sin (Hauptmarke) ein, so daß sie die Funktion $y = +\frac{1}{4} \sin 4x$ darstellt. Sodann übertragen wir die Überlagerungskurve dreier Glieder (Beilage II) auf die Streifenfläche. Die
a7 Kurve ist bereits als Musterkurve a 7 fein aufgetragen (sie überschneidet die Kurve a 5 im Mittelstreifen und an weiteren Stellen).

Bei Vorführungen vor größerem Publikum sind die Punkte mit dem roten Glasschreiber zu verstärken. Die rote Farbe bewirkt, daß die Kurven a 5 und a 7 auch bei gleicher Stärke deutlich auseinanderzuhalten sind.

1 Bringen wir sodann die Streifenserie in Hochstellung, so ist nach dem Prinzip des Negativverfahrens damit **das vierte Glied** $y = -\frac{1}{4} \sin 4x$ überlagert.

5 Die **Überlagerung des fünften Gliedes** $y = +\frac{1}{5} \sin 5x$ erfolgt mit Schablone 5 (Marke + sin).

Zusammenstellung:

Einstellung:	Bild:	Funktion:
a7 4 Schabl. 4, (+ sin)	1	$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$
1 Hochstellung	2	$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x$
5 Schabl. 5, (+ sin)	7	$y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{5} \sin 5x$

Läufereinstellung: $y_0 = 0$ (Achse x (60) in Bild 7).

Abgelesene **Funktionswerte:**

x	y	x	y	x	y
0,0	0,00	1,1	0,53	2,2	1,04
+ 0,1	+ 0,10	1,2	0,64	2,3	1,21
0,2	0,18	1,3	0,74	2,4	1,38
0,3	0,24	1,4	0,82	2,5	1,52
0,4	0,27	1,5	0,86	2,6	1,58
0,5	0,28	1,6	0,87	2,7	1,55
0,6	0,28	1,7	0,85	2,8	1,38
0,7	0,29	1,8	0,82	2,9	1,09
0,8	0,31	1,9	0,81	3,0	0,68
0,9	0,36	2,0	0,84	3,1	+ 0,21
1,0	0,43	2,1	0,92	3,2	— 0,29

Beachte: Betrachtet man die Kurve, die sich aus der Überlagerung ergibt, für sich allein, so hat man kaum den Eindruck, die in Beispiel 60 hinzugefügten Glieder hätten die Annäherung wesentlich verbessert. Oberflächlich betrachtet scheint das letzte Glied eher das Gegenteil zu bewirken. Ein Vergleich der „Abweichungsflächen" (Beilage II für drei Glieder, Bild 7 für fünf Glieder) zeigt jedoch, daß jedes Glied einen deutlichen Fortschritt bewirkt. Der Vergleich ist am deutlichsten, wenn man die Beilage II über die Endstellung von Beispiel 60 hält. Besonders auffällig ist die verbesserte Ausfüllung der Ecken.

§ 12 Weitere Beispiele zu § 10.

a) Einzelbeispiele (Funktionen und Gleichungen).

Beispiel 61 (Bild 6):

Funktion: $y = \sin x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3} \cdot \cos 3x + \frac{1}{6}$

Musterkurve a 5, Schablone 3 (Marke + cos)! a5 3

Läufereinstellung: $y_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ (Achse x [61] in Bild 6).

Man beachte das breite „Trog-Tal"!

Beispiel 62 (Bild 4):

Funktion: $y = \cos x - \frac{1}{3} \cdot \cos 3x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3}$

Musterkurve a 6, Schablone 2 (Marke — sin)! a6 2

$y_0 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ (Achse x [62] in Bild 4).

Beispiel 63 (Bild 4):

Gleichung: $\sin 2x = \sin x$.

Funktion: $y = \sin x - \sin 2x$.

Wir teilen das zweite Glied und schreiben:

Funktion: $y = \sin x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x$.

Die beiden ersten Glieder werden durch die Musterkurve a 5 dargestellt, das dritte Glied wird mit Schablone 2 überlagert (Marke — sin)! a5 2

$y_0 = 0$, Achse x (63) in Bild 4.

Wurzeln der Gleichung (Periode 2π!):

$x_1 = -1{,}05$; $x_2 = 0$; $x_3 = +1{,}05$; $x_4 = \pi$ $(\pm 2n \cdot \pi)$.

Beispiel 64 (Bild 8):

Gleichung: $10 \cdot \sin x - 5 \cdot \sin 2x + 2 \cdot \cos 5x - 2 = 0$.

Funktion: $y = \sin x - 0{,}5 \cdot \sin 2x + 0{,}2 \cdot \cos 5x - 0{,}2$.

Musterkurve a 5, Schablone 5 (Marke + cos). a5 5

$y_0 = +0{,}2 - 0{,}2 = 0$, Achse x (64) in Bild 8.

Wurzeln der Gleichung:

$x_{1,2} = 0$ (Doppelwurzel); $x_3 = 0{,}87$; $x_4 = 2{,}97$ $(\pm 2n \cdot \pi)$.

Beachte das bizarre Funktionsbild!

Beispiel 65 (Bild 4):

Funktion: $y = \sin x - \mathbf{\sin 2x} + \frac{1}{3} \cdot \sin 3x - \frac{1}{4} \cdot \sin 4x$.

Wir teilen das zweite Glied und schreiben:

$y = \sin x - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{\sin 2x} + \frac{1}{3} \cdot \sin 3x - \frac{1}{4} \cdot \sin 4x - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{\sin 2x}$.

Die ersten vier Glieder werden durch die dünn aufgetragene Musterkurve a 7 dargestellt. Das fünfte Glied überlagern wir mit Schablone 2 (Marke — sin)! a7 2

$y_0 = 0$, Achse x (63) in Bild 4 (dieselbe Achse wie in Beispiel 63).

b) Variierbare Beispiele.

Es ist nicht nur amüsant, sondern auch lehrreich, zu beobachten, welche Formen das Bild einer Funktion mit drei variablen Summanden annimmt, wenn nur **ein** Summand phasenverschoben wird! (Aufzufassen als Darstellung der Überlagerung einer starren Funktion mit einer „Wanderwelle").

Anmerkung: Ein „Doppelstreifenschieber" ließe die beliebige gegenseitige Phasenverschiebung **aller** Summanden zu. Es ließe sich damit zeigen, wie unerschöpflich mannigfaltig die Überlagerungsbilder dreier Teilfunktionen sind.

Bei den folgenden Beispielen ist die angeführte Schablone mit beliebiger Phase φ einführbar.

Man beobachte die Veränderungen des Funktionsbildes, wenn man die Phase regelmäßig um ein kleines Stück ändert (etwa 0,1, d. h. zwei Streifenbreiten). Lehrreich ist es auch, die aufeinanderfolgenden Funktionsbilder untereinander auf Transparentpapier zu pausen (entsprechend Beispiel 6, Bild 16).

Beachte: Jede einzelne Stellung kann als Einzelbeispiel zur Darstellung einer Funktion bzw. zur Lösung einer transzendenten Gleichung verwendet werden. Eine additive Konstante wird durch die Läufereinstellung mit y_0 erfaßt.

Beispiel 66 (Bild 3 und 4):

Funktion: $y = \cos x - \frac{1}{3} \cdot \cos 3x + \frac{1}{2} \cdot \sin (2x - C)$.
(C ist eine „freie" Konstante!)
Musterkurve a 6; Schablone 2 mit Phase $\varphi = \frac{C}{2}$

Beispiel 67 (Bild 3 und 4):

Funktion: $y = \sin x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{2} \cdot \sin (2x - C)$.
a5 2 Musterkurve a 5; Schablone 2 mit Phase $\varphi = \frac{C}{2}$

Anmerkung: Gemäß § 3, Punkt e, Beispiel 16, bedeuten das zweite und dritte Glied zusammen **eine** harmonische Schwingung, die mit der Phase auch ihre Amplitude ändert (nicht jedoch die Frequenz). Wir haben also in Beispiel 67 stets das Bild der Überlagerung von **zwei** harmonischen Schwingungen!

Grenzfälle: 1. $C = 0$, Funktion: $y = \sin x$ (Bild 3)
2. $C = \pi$, Funktion: $y = \sin x - \sin 2x$ (Bild 4, vgl. Beispiel 63!)

Beispiel 68 (Bild 5 und 6):

Funktion: $y = \cos x - \frac{1}{3} \cdot \cos 3x + \frac{1}{3} \cdot \sin (3x - C)$.
a6 3 Musterkurve a 6, Schablone 3 mit Phase $\varphi = \frac{C}{3}$
Gegenstück zu Beispiel 67 für die Kurve a 6!
Einzelbeispiele: 1. $C = 0$ . . . . . Bild 5,
2. $C = -\frac{\pi}{2}$ . . . . . Bild 6.

Beispiel 69 (Bild 5 und 6):

Funktion: $y = \sin x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{3} \cdot \sin (3x - C)$.
a5 3 Musterkurve a 5, Schablone 3 mit Phase $\varphi = \frac{C}{3}$

Beispiel 70 (Bild 1):

Funktion: $y = \sin x - 0{,}5 \cdot \sin 2x + 0{,}25 \cdot \sin (4x - C)$.
a5 4 Kurve a 5, Schablone 4 mit Phase $\varphi = \frac{C}{4}$

Beispiel 71 (Bild 1):

Funktion: $y = \cos x - \frac{1}{3} \cdot \cos 3x + \frac{1}{4} \cdot \cos (4x - C)$.
Kurve a 6, Schablone 4 mit Phase $\varphi = \frac{C}{4}$ für Nebenmarke + cos. a6 4

Beispiel 72 (Bild 7, 8 und 9):

Funktion: $y = \sin x - 0{,}5 \cdot \sin 2x + 0{,}2 \cdot \sin (5x - C)$.
Kurve a 5, Schablone 5 mit Phase $\varphi = \frac{C}{5}$ (Hauptmarke). a5 5

Beispiel 73 (Bild 7, 8 und 9):

Funktion: $y = \cos x - \frac{1}{3} \cdot \cos 3x + \frac{1}{5} \cdot \cos (5x - C)$.
Kurve a 6, Schablone 5 mit Phase $\varphi = \frac{C}{5}$ für Nebenmarke + cos. a6 5

Beispiel 74 (Bild 7, 8 und 9):

Funktion: $y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{5} \sin (5x - C)$.
Dünne Musterkurve a 7, Schablone 5 mit Phase $\varphi = \frac{C}{5}$ a7 5

Beispiel 75:

Funktion: $y = \sin x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + C \cdot x$.
Kurve a 5, Stab mit Steigung $k = C$. a5 1

Beispiel 76:

Funktion: $y = \cos x - \frac{1}{3} \cdot \cos 3x + C \cdot x$.
Kurve a 6, Stab mit Steigung $k = C$. a6 1

Anmerkung: Zeige Beispiel 75 und 76 auch für negative C!

Beachte:

Mancher Benützer des Funktionenschiebers wird schon durch Teil A der Anleitung verleitet werden, selbständig zu arbeiten, indem er sich mit Hilfe des Negativverfahrens selbst Kurven aufträgt. Es können hiezu Glasschreiber verwendet werden. Wählt man abstechende Farben, so stört es nicht, wenn sich die Kurven mit den Musterkurven kreuzen.

Aufgetragene Kurven lassen sich wieder abwischen. Die Musterkurven bleiben hiebei unbeschädigt erhalten.

Wer viel selbständig arbeitet, bestellt zweckmäßig eine eigene Streifenserie ohne Musterkurven (vgl. Anmerkungen nach Beispiel 53, § 10).

Anmerkung: Bild 16 wurde mit einer solchen Streifenserie durch Auftragen von Geraden hergestellt (Schablone 4 mit wechselnder Phase im Negativverfahren, nach vollendeten Auftragungen Schablone 2 überlagert).

§ 13 Die Gleichung 4. Grades (Hyperbelmethode).

Der letzte Paragraph des Teiles A soll kurz mit einer Methode bekannt machen, die mit überraschender Einfachheit und Genauigkeit die Wurzeln **nicht reduzierter** Gleichungen 4. Grades ermittelt. Beispiel 80 zeigt die Lösung der reduzierten Gl. 4. Gr. als besonders einfachen Sonderfall der Methode!

a) Prinzip der Hyperbelmethode.

Gleichung vierten Grades („Normalform"):

$$x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0.$$

Wir dividieren das Gleichungspolynom durch $(x + a)$:

$$(x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d) \;:\; (x + a) = x^3 + b\,x + q.$$

Rest: r

Anmerkung: q und r ergeben sich aus der Division! ($q = c - ab$; $r = d - aq$; es hat jedoch keinen Sinn, sich diese Formeln zu merken! Man merke sich nur die Division!)

Wir können demnach die Gleichung schreiben:

$$x^3 + b\,x + q + \frac{r}{x + a} = 0.$$

oder:

$$\boxed{x^3 + b\,x + q = \frac{-r}{x + a}}$$

Wir erhalten demnach die **Wurzeln** der Gleichung als **Abszissen der Schnittpunkte** der Kurven:

I . . . . $y = x^3 + b\,x + q$ (kubische Parabel)

II . . . . $y = \dfrac{-r}{x + a}$ (gleichseitige Hyperbel)

b2 1 I. (die kubische Parabel) erhält man aus der Musterkurve b 2 durch Stabüberlagerung (mit Steigung $k = b$) und Läufereinstellung (mit $y_0 = q$).

Hiebei beachte man: wie in § 7 (kubische Gleichung) ist auch hier die Einheitsstrecke für die y-Richtung auf ein Zehntel verkürzt (also 0,5 cm). Es ist dies bei der Steigung und bei y_0 (Läufereinstellung) zu berücksichtigen.

Die Koordinatenscheibe ist bei der Hyperbelmethode (im Gegensatz zu § 7!) n i e verschoben. Die y-Achse liegt also stets im Mittelstreifen.

II. (die gleichseitige Hyperbel) ist in der Kurvenschar der „Hyperbelscheibe" (transparente Astralonscheibe) enthalten. Legt man diese Scheibe in den Läuferrahmen auf die Koordinatenscheibe, so deckt sich eine Asymptote der Schar mit der x-Achse der Koordinatenscheibe, während die andere Asymptote mit Hilfe der Phasenskala des Läuferrahmens auf eine bestimmte „Phase" φ eingestellt werden kann. Die Hyperbeln der Schar haben sodann die Gleichungen:

$$y = \frac{C}{x - \varphi}$$

Hiebei ist der Wert für C zu jeder einzelnen Hyperbel auf der Hyperbelscheibe angegeben. Wir nennen diesen Wert den „Faktor" der Hyperbel. Für unsere Gleichung benötigen wir also die Hyperbel mit dem Faktor $\mathbf{C = -r}$, wobei die Hyperbelscheibe auf die Phase $\varphi = \mathbf{-a}$ eingestellt sein muß.

Man beachte:

1. Die Hyperbelscheibe läßt sich für positive und negative Phase so legen, daß sie über alle Streifen reicht (Bild 15 b und 15 a).
2. Beim Aufsuchen der Schnittpunkte verfolge man b e i d e Äste der Hyperbel (bei positivem Faktor im 1. und 3. Quadranten, bei negativem Faktor im 2. und 4. Quadranten).

b) Musterbeispiele.

Beispiel 77 (Bild 11 und 15 a):

Gleichung: $x^4 + x^3 + 5\,x^2 + 13\,x - 2 = 0.$

Division: $(x^4 + x^3 + 5\,x^2 + 13\,x - 2) \;:\; (x + 1) = \mathbf{x^3 + 5\,x + 8}$

$8\,x - 2$

Rest: -10.

Gleichung: $x^3 + 5\,x + 8 = \dfrac{+10}{x + 1}$

Einstellung:
1. Stab: $k = +5$ | Achse x (77)
2. Läufer: $y_0 = +8$ | in Bild 11
3. Phase der Hyperbelscheibe: $\varphi = -1$
4. Faktor der Hyperbel: $C = +10$

Bild 15 a zeigt den Ausschnitt aus Bild 11 mit aufgelegter Hyperbelscheibe.

Wurzeln (Abszissen der Schnittpunkte):

$x_1 = -2$; $x_2 = +0{,}15$; $x_{3,4}$ nicht reell

Korrigierte Werte:

$x_1 = -2{,}00$; $x_2 = +0{,}145$

Beispiel 78 (Bild 14 und 15 b):

Gleichung: $x^4 - x^3 - 10\,x^2 + 5\,x + 15 = 0.$

Division: $(x^4 - x^3 - 10\,x^2 + 5\,x + 15) \;:\; (x - 1) = \mathbf{x^3 - 10\,x - 5}$

$-5\,x + 15$

Rest: $+10$.

Gleichung: $x^3 - 10\,x - 5 = \dfrac{-10}{x - 1}$

Einstellung: b2 1
1. Stab: $k = -10$ | Achse x (78)
2. Läufer: $y_0 = -5$ | in Bild 14
3. Phase: $\varphi = +1$
4. Faktor: $C = -10$

Bild 15 b zeigt den Ausschnitt aus Bild 14 mit aufgelegter Hyperbelscheibe.

Wurzeln: $x_1 = -2{,}65$; $x_2 = -1{,}1$; $x_3 = +1{,}6$; $x_4 = +3{,}2$.

Korrigiert: $x_1 = -2{,}66$; $x_2 = -1{,}11$; $x_3 = +1{,}59$; $x_4 = +3{,}18$.

c) Sonderfälle.

1. Die Division geht auf (kein Rest).

Bleibt bei der Division kein Rest, so ist:

$$x_1 = -a.$$

Die weiteren reellen Wurzeln ergeben sich aus den Nullstellen der kubischen Parabel.

Beispiel 79:

Gleichung: $x^4 - 1{,}2\,x^3 - 3\,x^2 + 5{,}6\,x - 2{,}4 = 0.$

$(x^4 - 1{,}2\,x^3 - 3\,x^2 + 5{,}6\,x - 2{,}4) \;:\; (x - 1{,}2) = \mathbf{x^3 - 3\,x + 2}$

kein Rest!

Erste Wurzel: $\mathbf{x_1 = 1{,}2.}$

Restgleichung: $x^3 - 3x + 2 = 0.$

b2 1 Einstellung: 1. Stab: $k = -3$

2. Läufer: $y_0 = +2$

Weitere Wurzeln (Abszissen der Nullstellen):

$\mathbf{x_2 = -2;} \quad \mathbf{x_{3,4} = +1}$ (Doppelwurzel).

Anmerkung: Dieser Fall tritt stets ein, wenn **drei** Wurzeln der Gleichung 4. Grades die Summe Null haben.

2. Die reduzierte Gleichung 4. Grades (kein kubisches Glied).

Hat die Gleichung kein kubisches Glied, so erhält die Hyperbelscheibe die Phase Null.

Beachte: Bei der Division k e i n e R e c h e n a r b e i t !

Beispiel 80:

Gleichung: $x^4 - 8{,}25\,x^2 + 3{,}5\,x + 3{,}75 = 0.$

Gleichung nach der Division durch x:

$$x^3 - 8{,}25\,x + 3{,}5 = \frac{-3{,}75}{x}$$

b2 1 Einstellung: 1. Stab: $k = -8{,}25$

2. Läufer: $y_0 = +3{,}5$

3. Phase: $\varphi = 0$

4. Faktor: $C = -3{,}75$

Beachte beim Faktor: Die Hyperbel mit dem Faktor — 3,75 ist nicht aufgetragen. Man muß diese Hyperbel nach Augenmaß zwischen den Hyperbeln mit den Faktoren — 3 und — 4 „interpolieren". Man erleichtert sich die Ablesung der Wurzeln, wenn man an den Überschneidungsstellen mit der kubischen Parabel kleine Stücke der interpolierten Hyperbel mit Glasschreiber auf die Hyperbelscheibe aufträgt. Die erzielte Genauigkeit ist trotz der Interpolation überraschend!

Wurzeln: $x_1 = -3; \quad x_2 = -0{,}5; \quad x_3 = +1; \quad x_4 = +2{,}5.$

Anmerkung: Dieser Fall tritt ein, wenn die Summe aller Wurzeln Null ist.

d) Transformation nicht einstellbarer Fälle.

Lassen die Koeffizienten die Einstellung nicht zu, so kann man dieselbe Transformation anwenden wie in § 7:

$\mathbf{x = c\,\bar{x}};$ z. B.: $x = 10\,\bar{x}$ oder $x = 2\,\bar{x}.$

Beispiel 81:

Gleichung: $x^4 - 20\,x^3 + 500\,x^2 - 8000\,x + 60000 = 0.$

Die Größe der Koeffizienten läßt sogleich die Notwendigkeit der Transformation erkennen!

Transformation: $x = 10\,\bar{x}.$

$$10000\,\bar{x}^4 - 20000\,\bar{x}^3 + 50000\,\bar{x}^2 - 80000\,\bar{x} + 60000 = 0.$$

Gleichung: $\bar{x}^4 - 2\,\bar{x}^3 + 5\,\bar{x}^2 - 8\,\bar{x} + 6 = 0.$

$$(\bar{x}^4 - 2\,\bar{x}^3 + 5\,\bar{x}^2 - 8\,\bar{x} + 6) : (\bar{x} - 2) = \bar{x}^3 + \mathbf{5\,\bar{x} + 2}$$

Rest: + 10.

Gleichung: $\bar{x}^3 + 5\,\bar{x} + 2 = \dfrac{-10}{\bar{x} - 2}$

Einstellung: 1. Stab: $k = 5$ b2 1

2. Läufer: $y_0 = 2$

3. Phase: $\varphi = 2$

4. Faktor: $C = -10$

K e i n e r e e l l e W u r z e l !

Hat man die Notwendigkeit der Transformation nicht sogleich erkannt, so kann man sie auch noch mit der zur Einstellung „zubereiteten" Gleichung vornehmen:

Beispiel 82:

Gleichung: $x^4 + 2\,x^3 + 20\,x^2 + 104\,x - 32 = 0.$

Nach der Division: $x^3 + 20\,x + 64 = \dfrac{160}{x + 2}$

Da wir k = 20 nicht einstellen können, transformieren wir!

Transformation: $x = 2\,\bar{x}.$

$$8\,\bar{x}^3 + 40\,\bar{x} + 64 = \frac{160}{2\,\bar{x} + 2}$$

$$\bar{x}^3 + 5\,\bar{x} + 8 = \frac{10}{\bar{x} + 1}$$

Einstellung: $k = 5;\ y_0 = 8;\ \varphi = -1;\ C = 10$ (Beispiel 77). b2 1

Wurzeln der transformierten Gleichung:

$\bar{x}_1 = -2; \quad \bar{x}_2 = +0{,}15; \quad \bar{x}_{3,4}$ komplex!

Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$x_1 = -4; \quad x_2 = +0{,}3; \quad x_{3,4}$ komplex!

Korrigiert: $x_1 = -4{,}00; \quad x_2 = +0{,}29.$

Theoretische Bemerkung zur Hyperbelmethode: Eine Hyperbel hat mit einer kubischen Parabel 6 Schnittpunkte (Kurve 2. und 3. Ordnung). Bei der Hyperbelmethode haben jedoch Hyperbel und kubische Parabel stets einen unendlich fernen Punkt doppelt zählend gemeinsam, also bleiben nur mehr vier Schnittpunkte frei, aus denen sich die vier Wurzeln der Gleichung 4. Grades ergeben.

Da in § 7 bereits eine Lösungsart für kubische Gleichungen besprochen wurde, bleibt die besonders dankbare Lösung der kubischen Gleichung mit Hyperbelscheibe und Parabel b 1 dem Teil B der Anleitung vorbehalten.

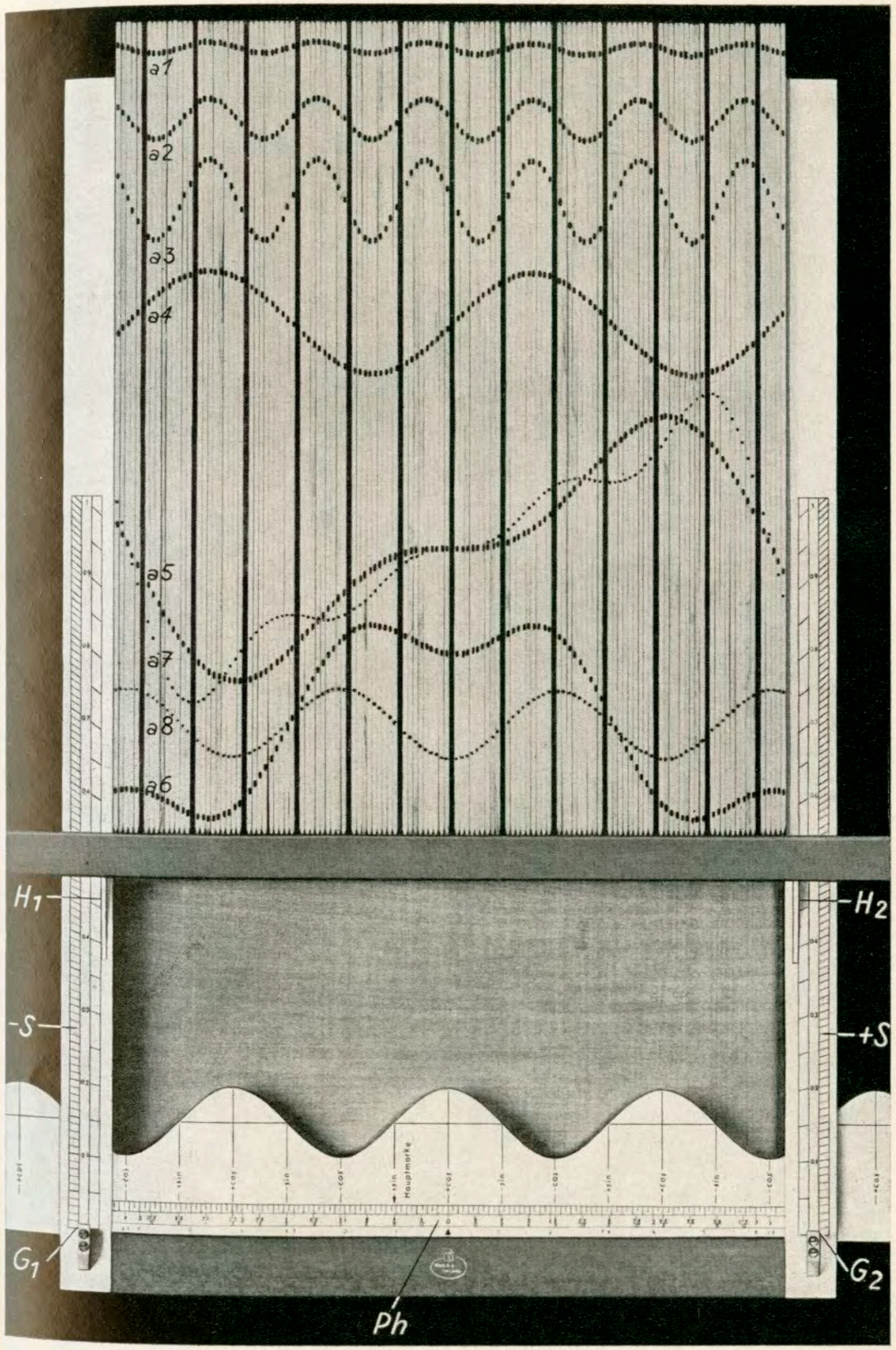


Bild 2

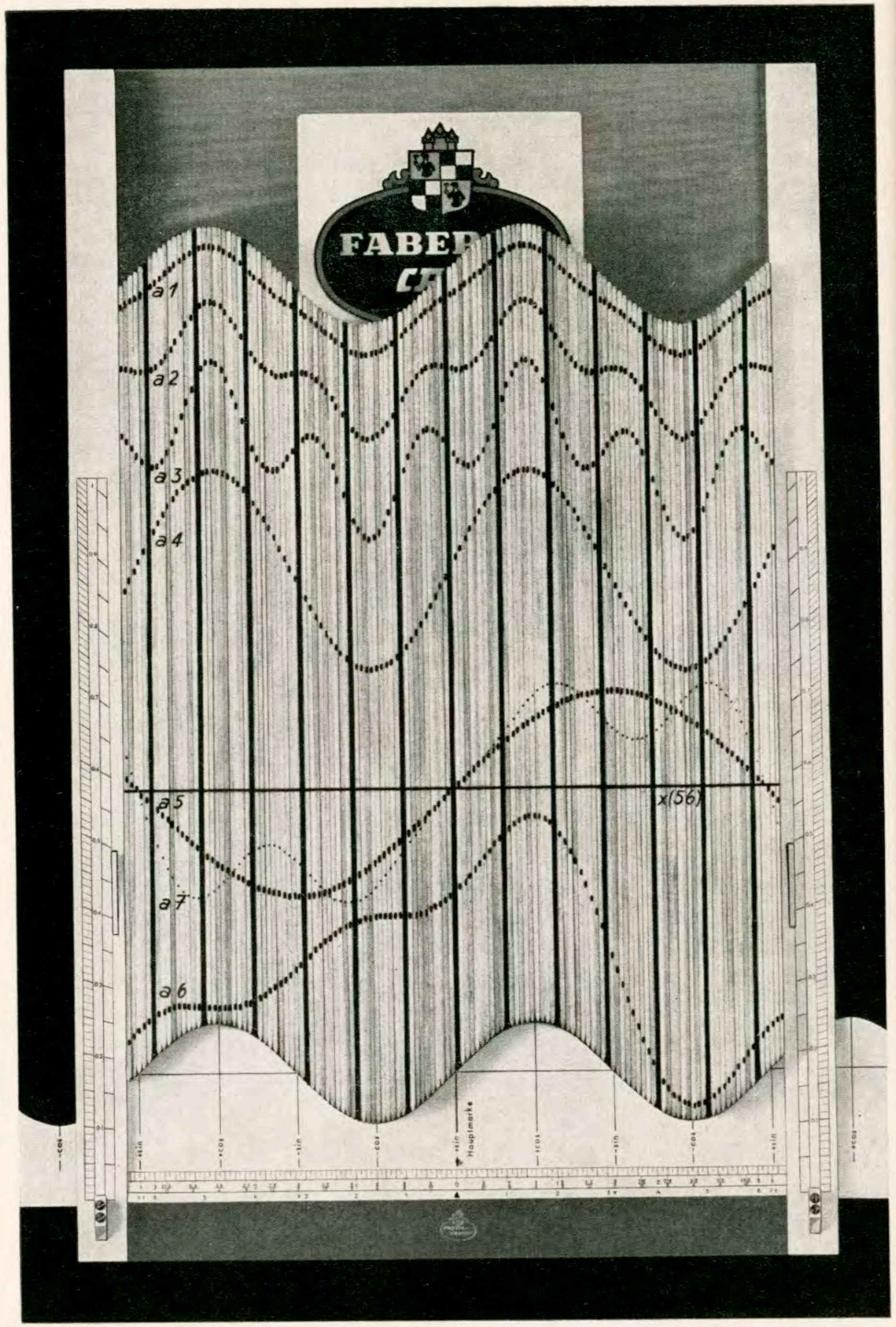


Bild 3

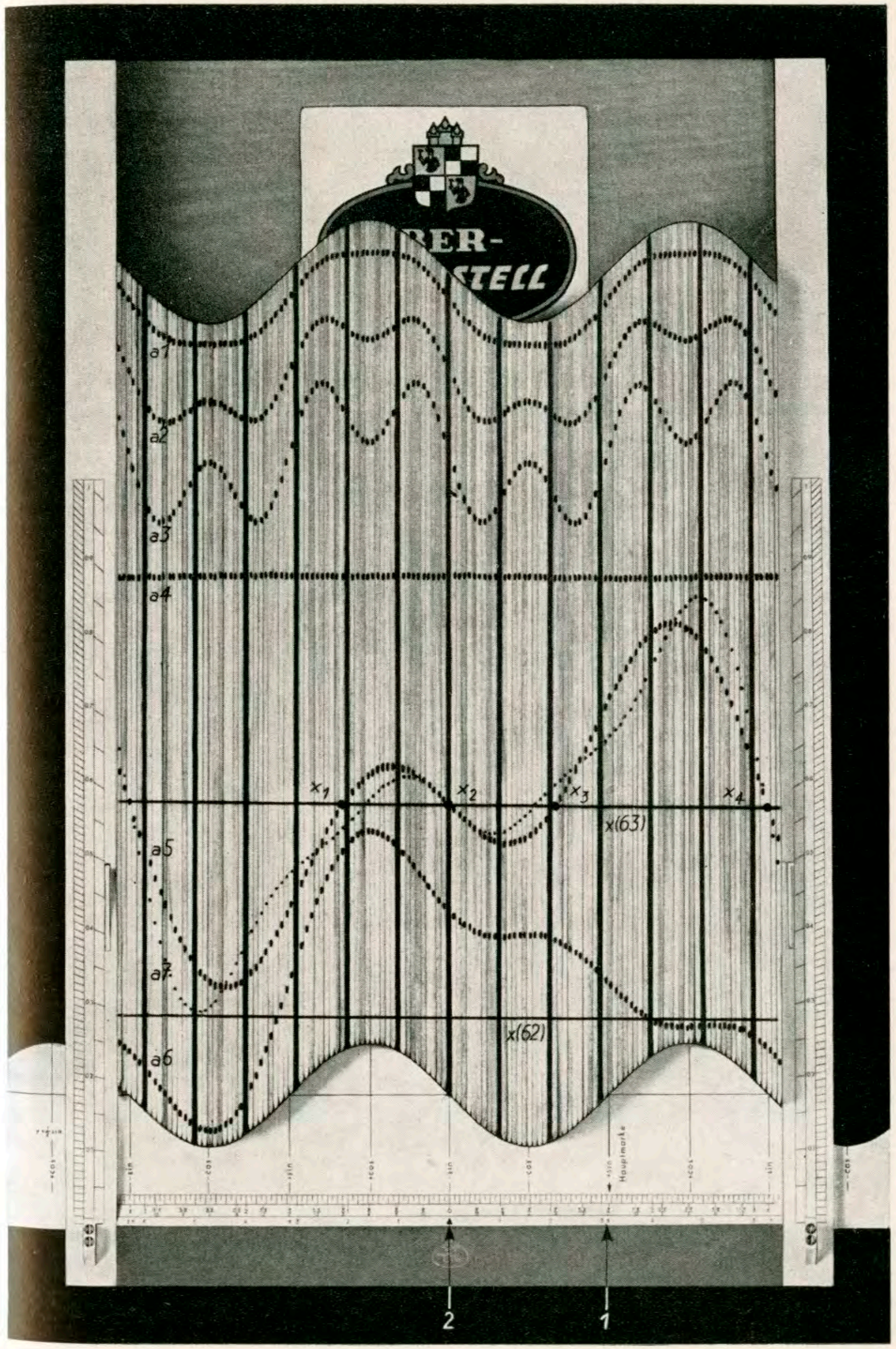


Bild 4

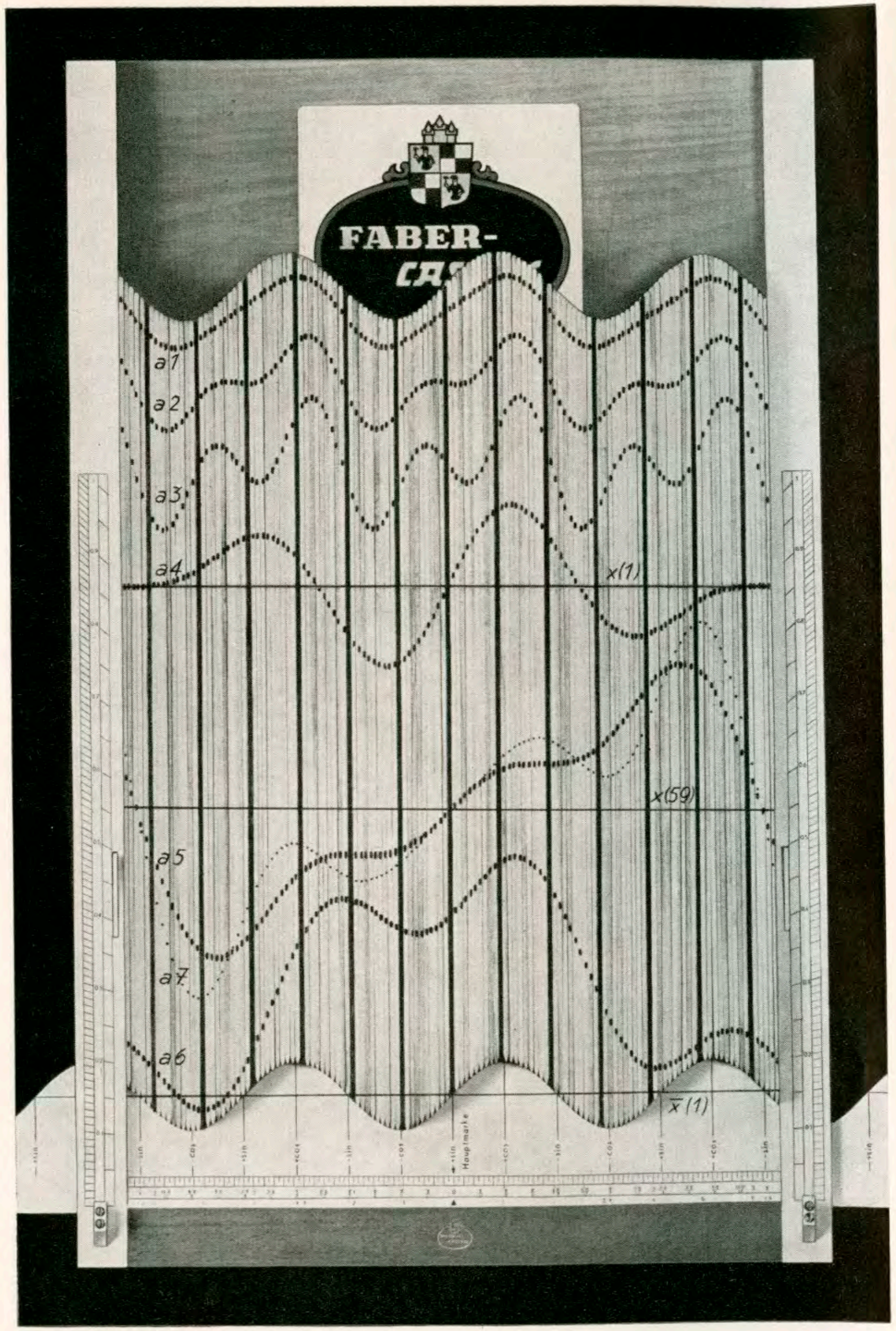

FABER-
a1
a2
a3
a4
x(1)
x(59)
a5
a7
a6
$\bar{x}$ (1)
Hauptmarke

Bild 5

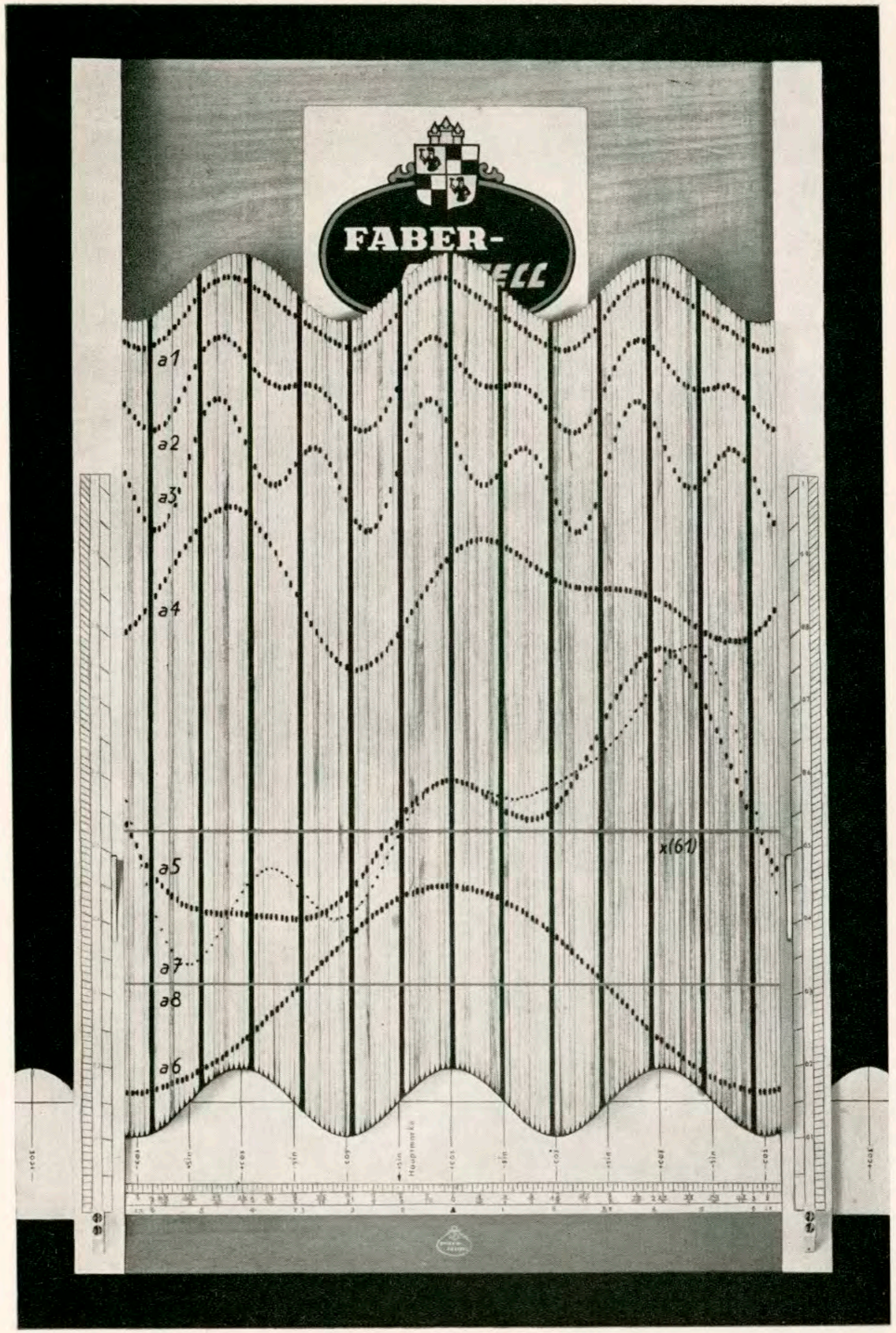

FABER-
a1
a2
a3
a4
x(61)
a5
a7
a8
a6
Hauptmarke

Bild 6

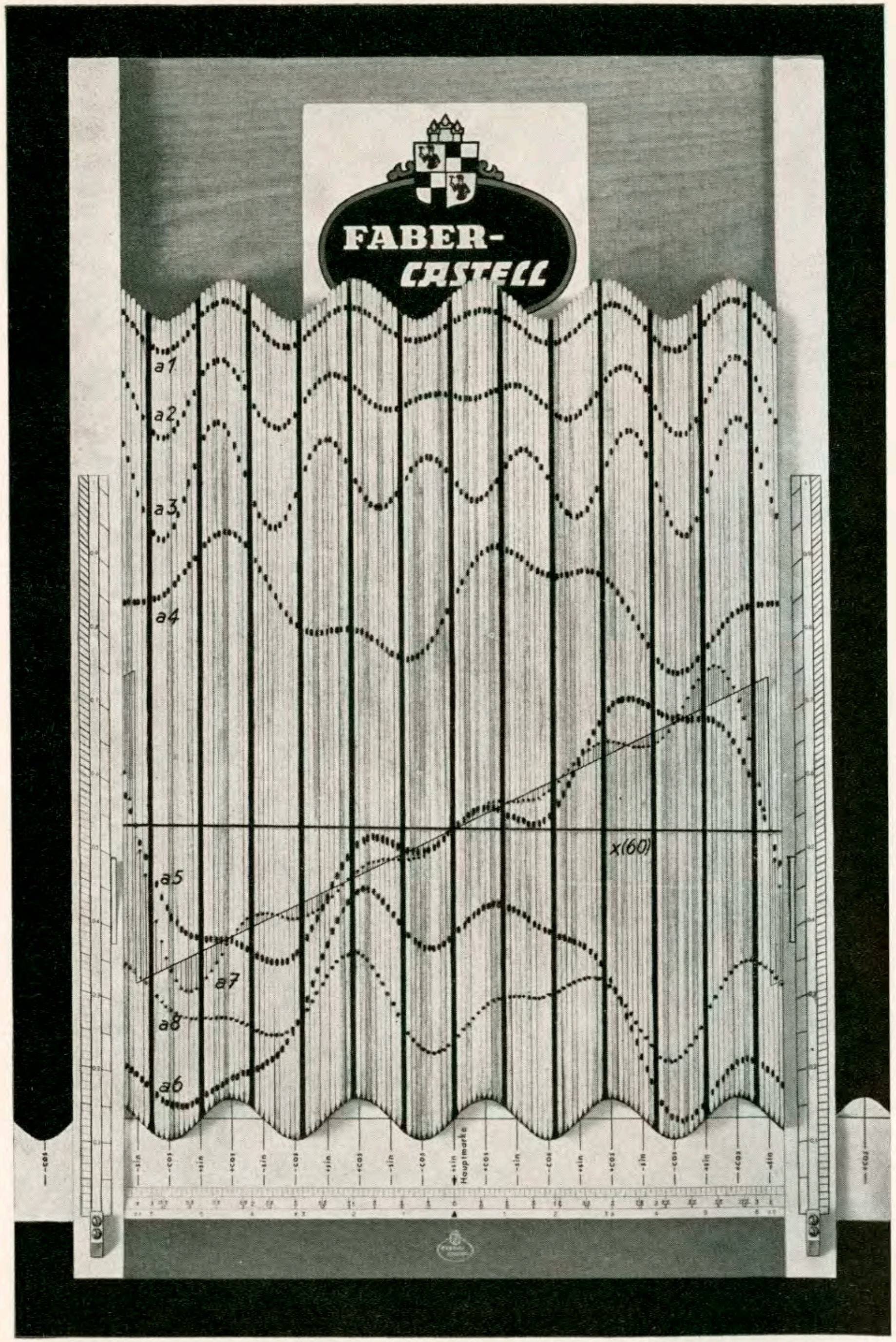

FABER-
CASTELL
a1
a2
a3
a4
a5
a6
a7
a8
x(60)

Bild 7

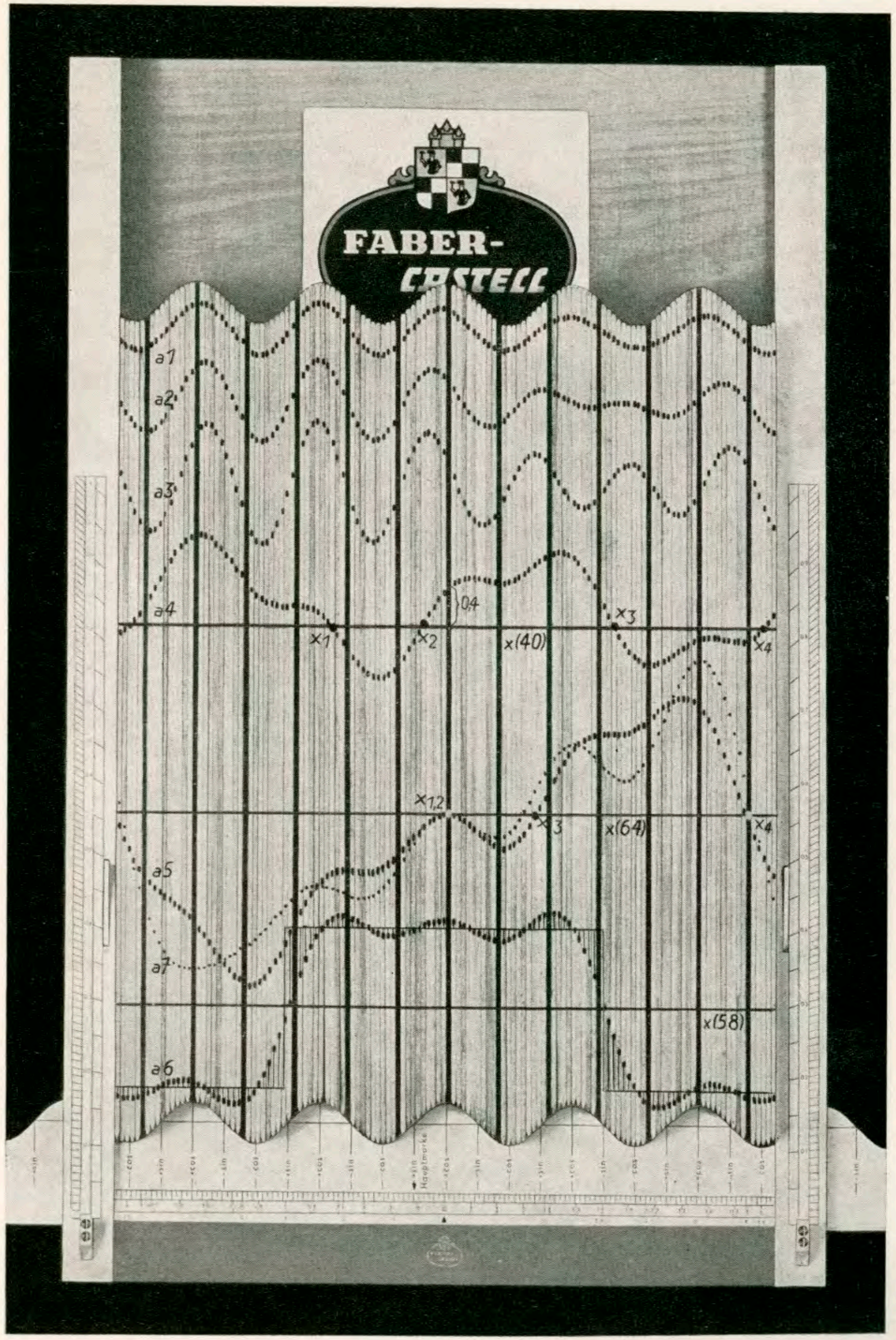

FABER-
CASTELL
a1
a2
a3
a4
a5
a6
a7
x1
x2
x3
x4
x(40)
x(64)
x(58)

Bild 8

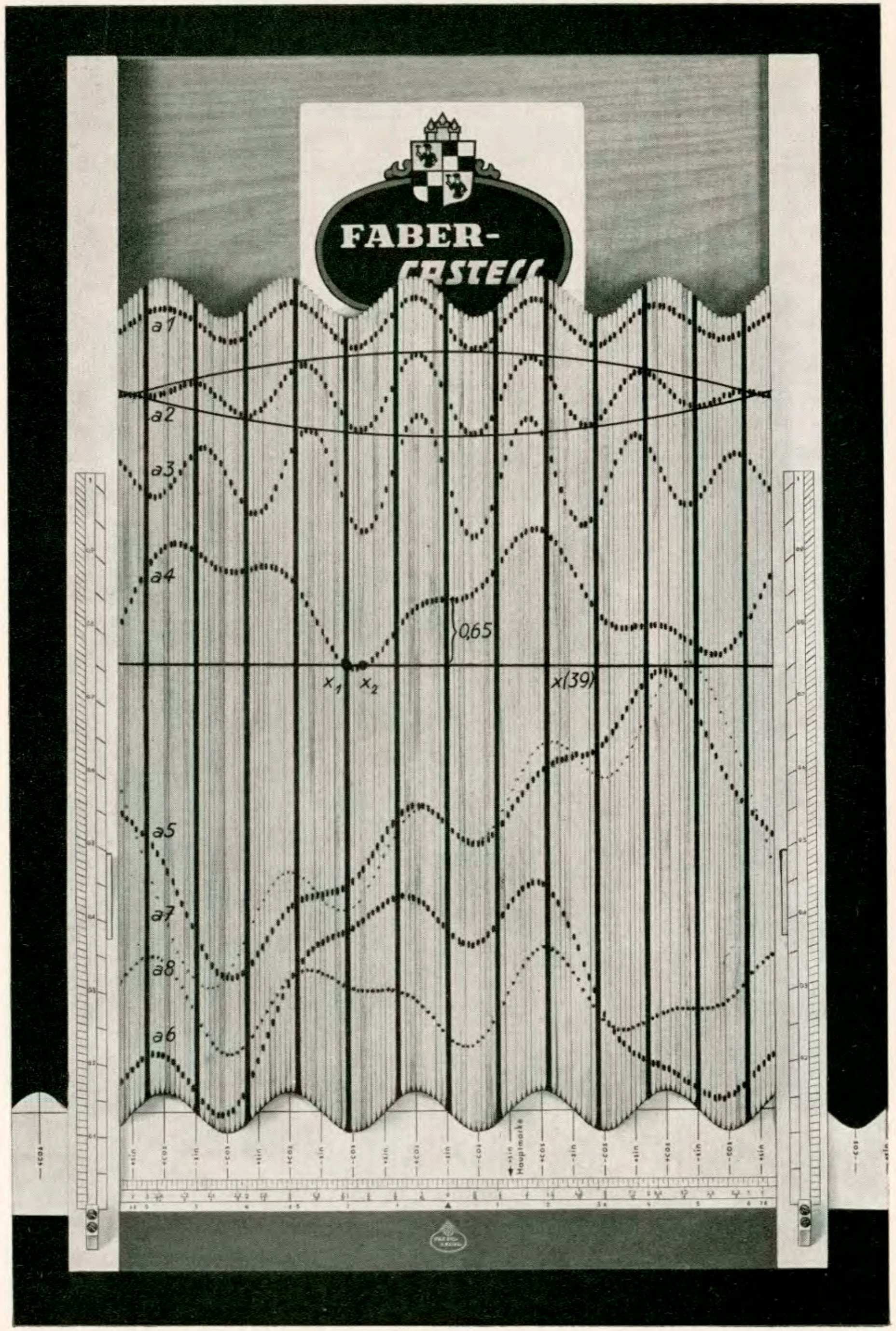


Bild 9

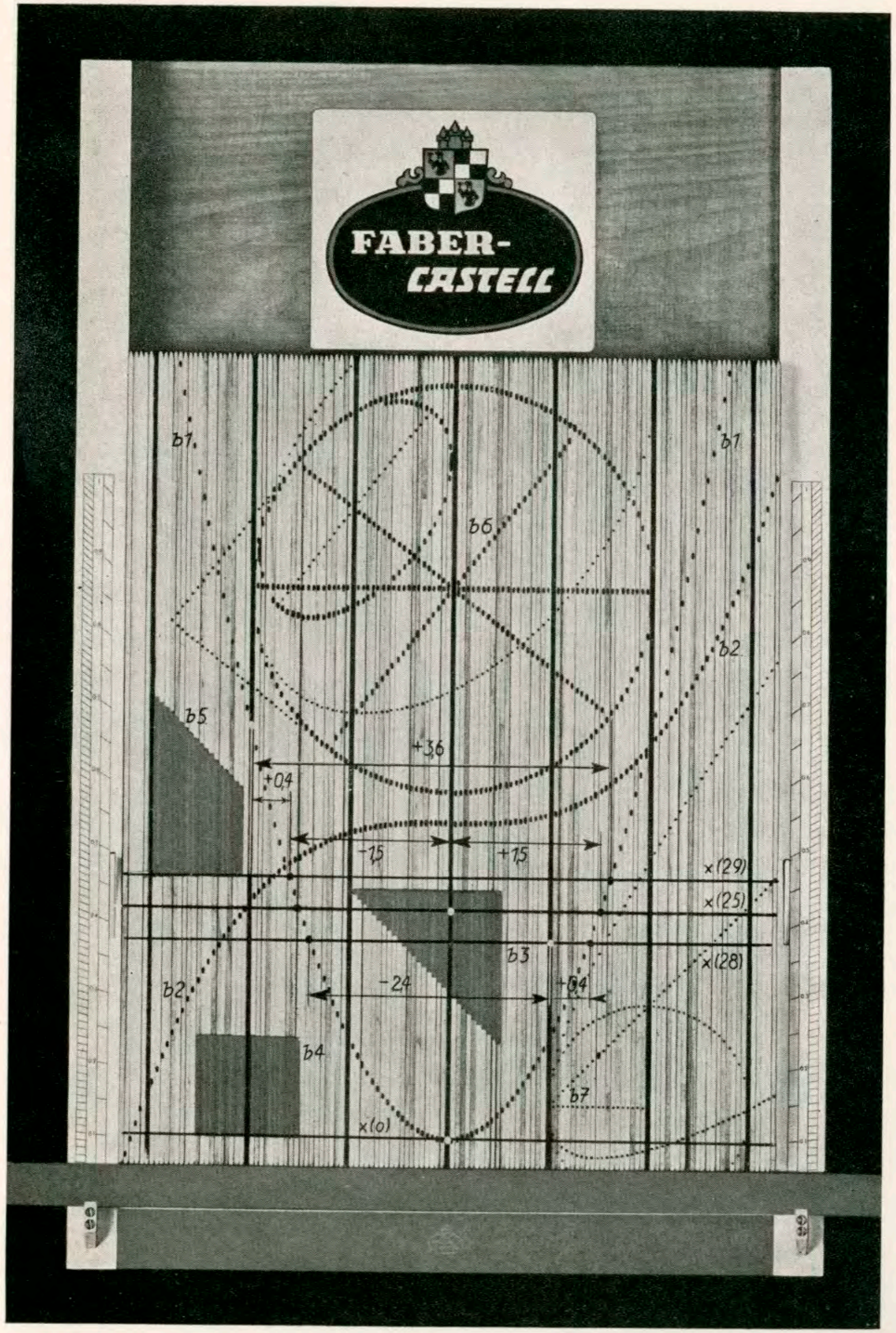


Bild 10

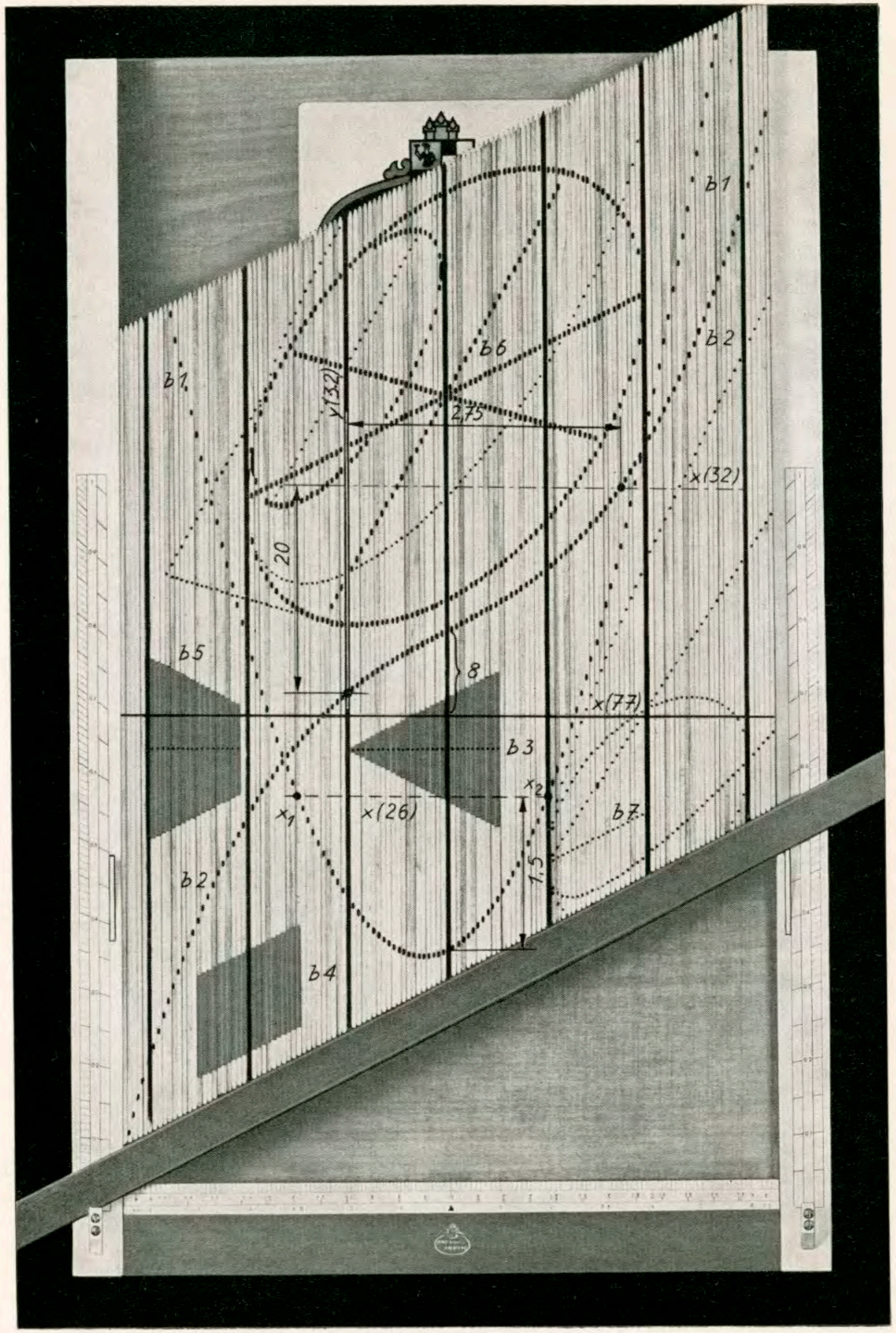


Bild 11

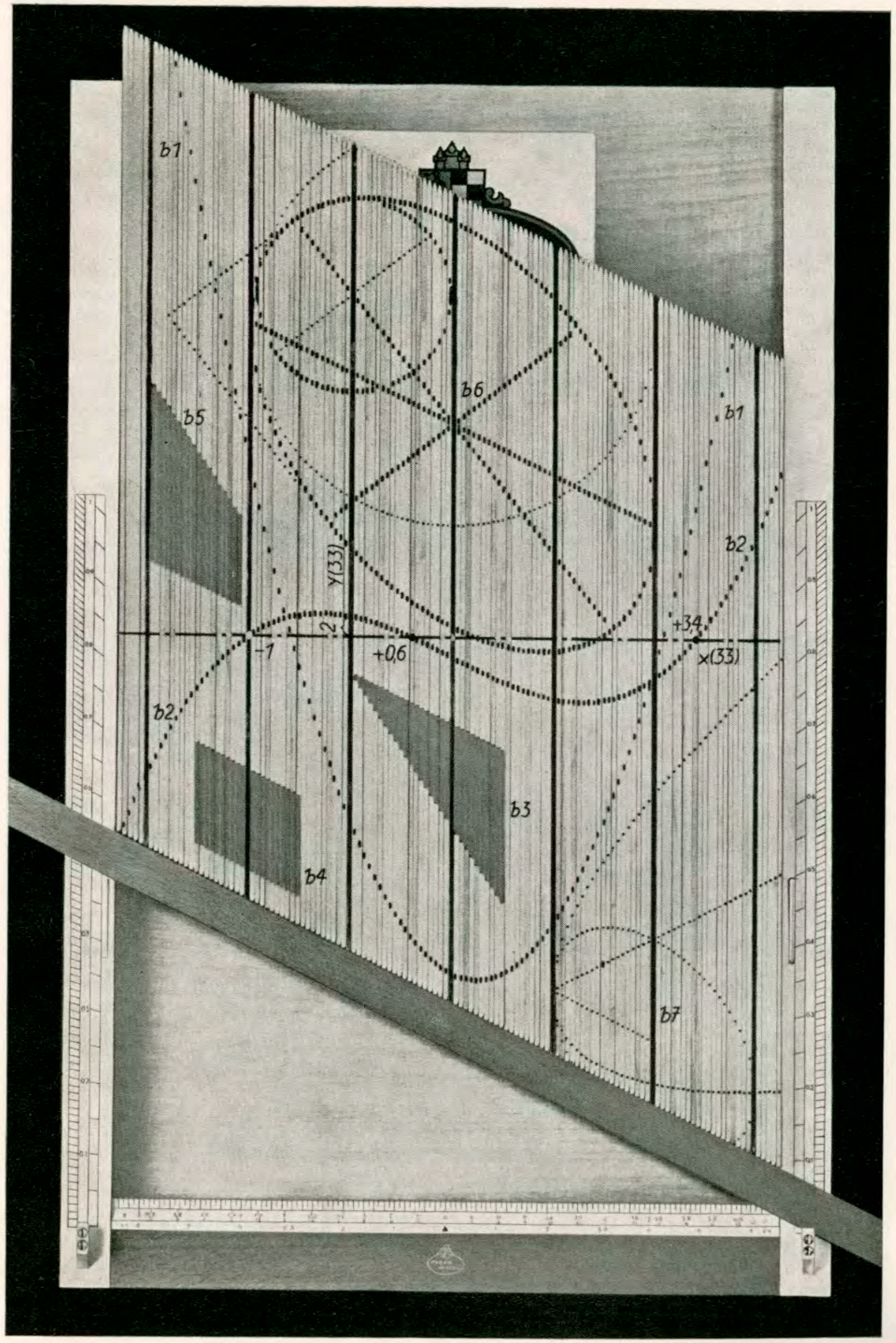


Bild 12

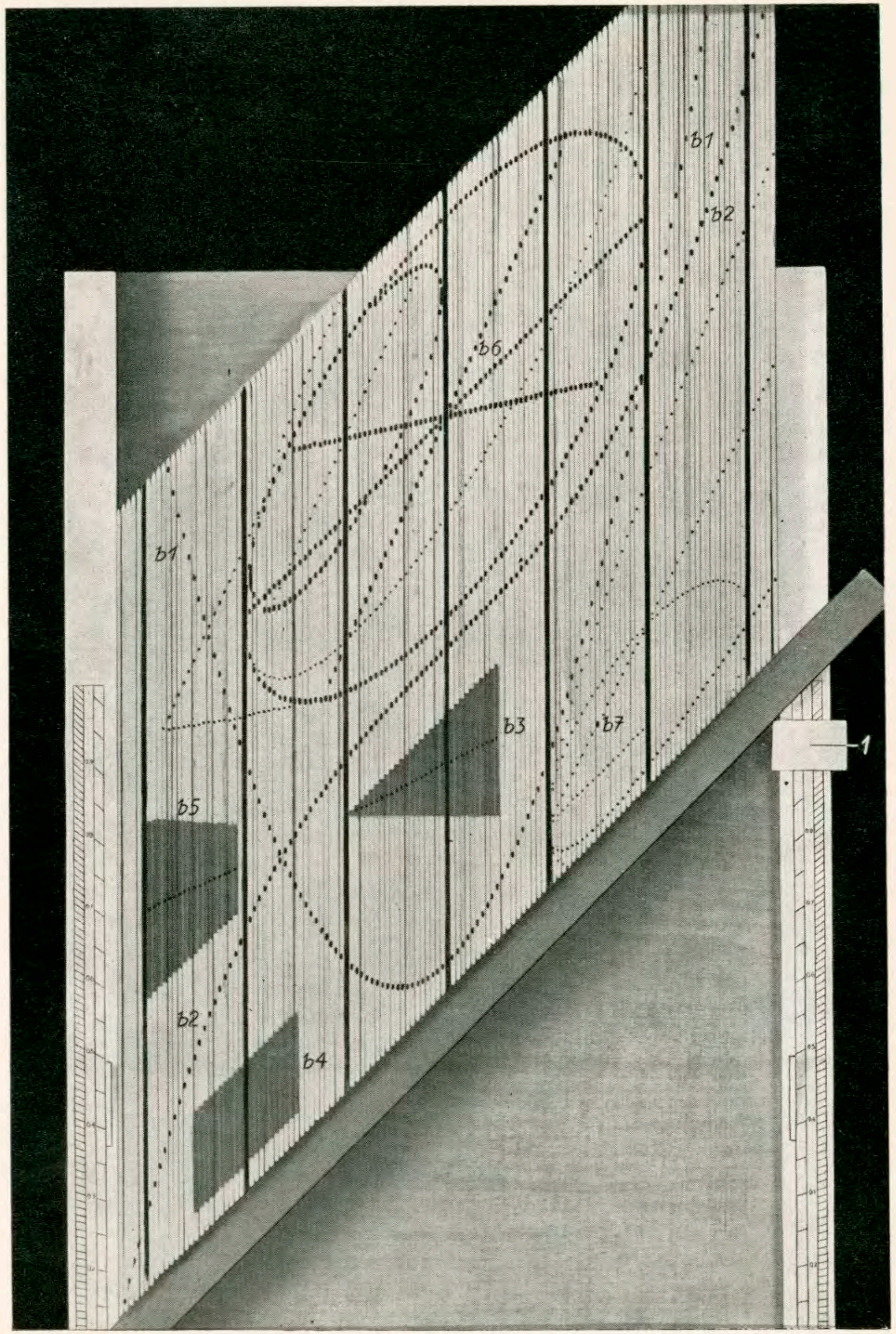


Bild 13

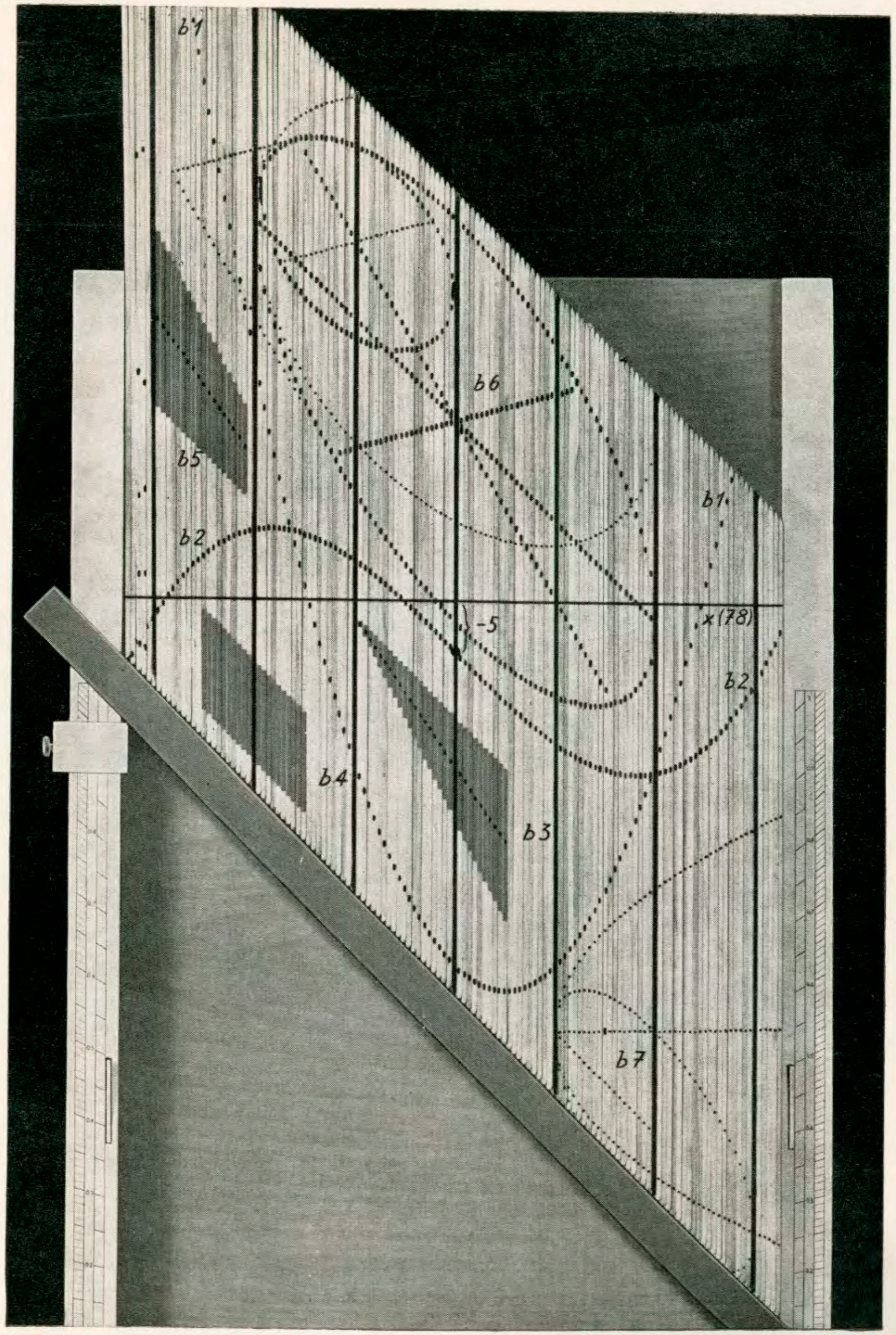


Bild 14

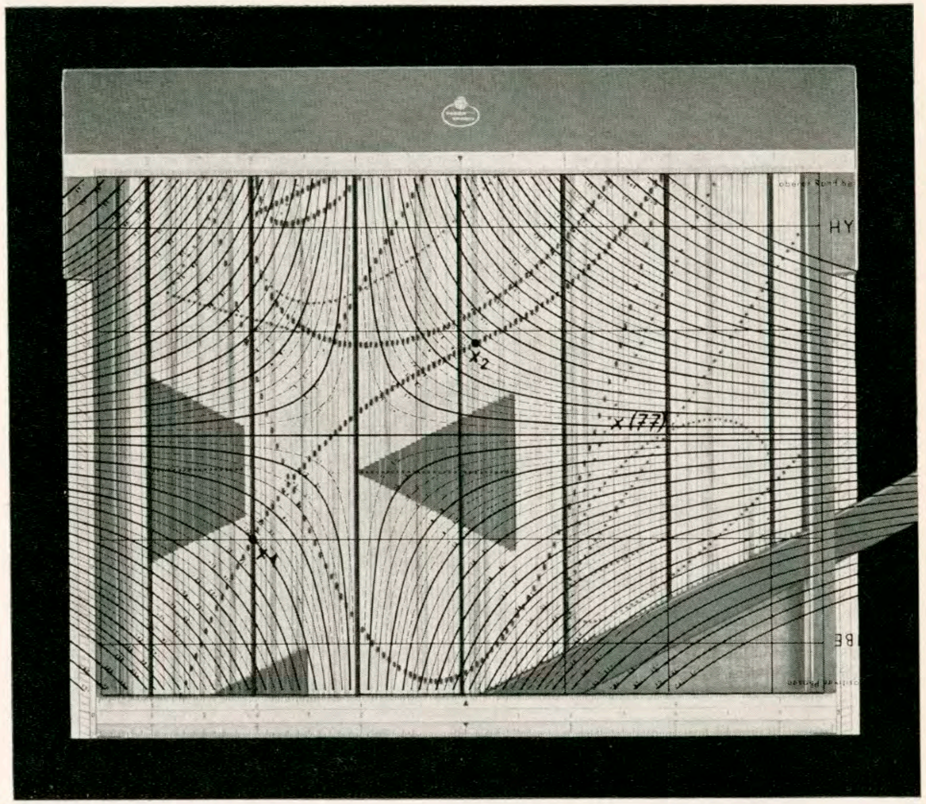


Bild 15a

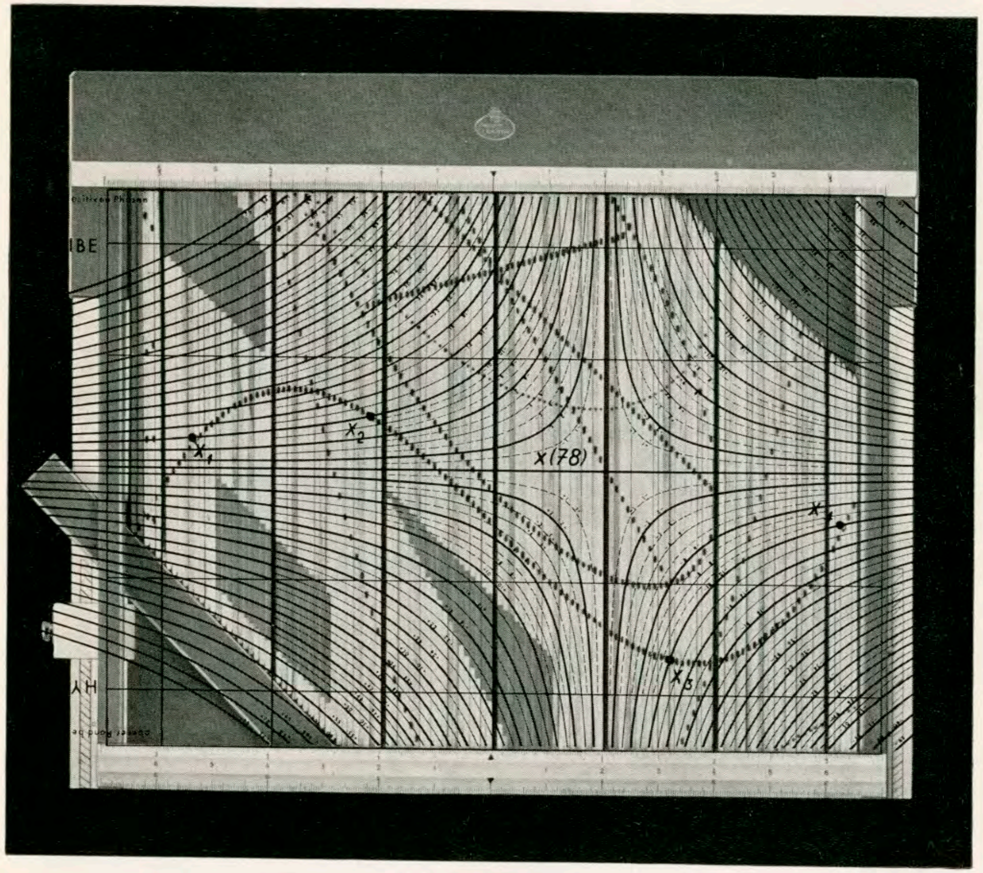


Bild 15b

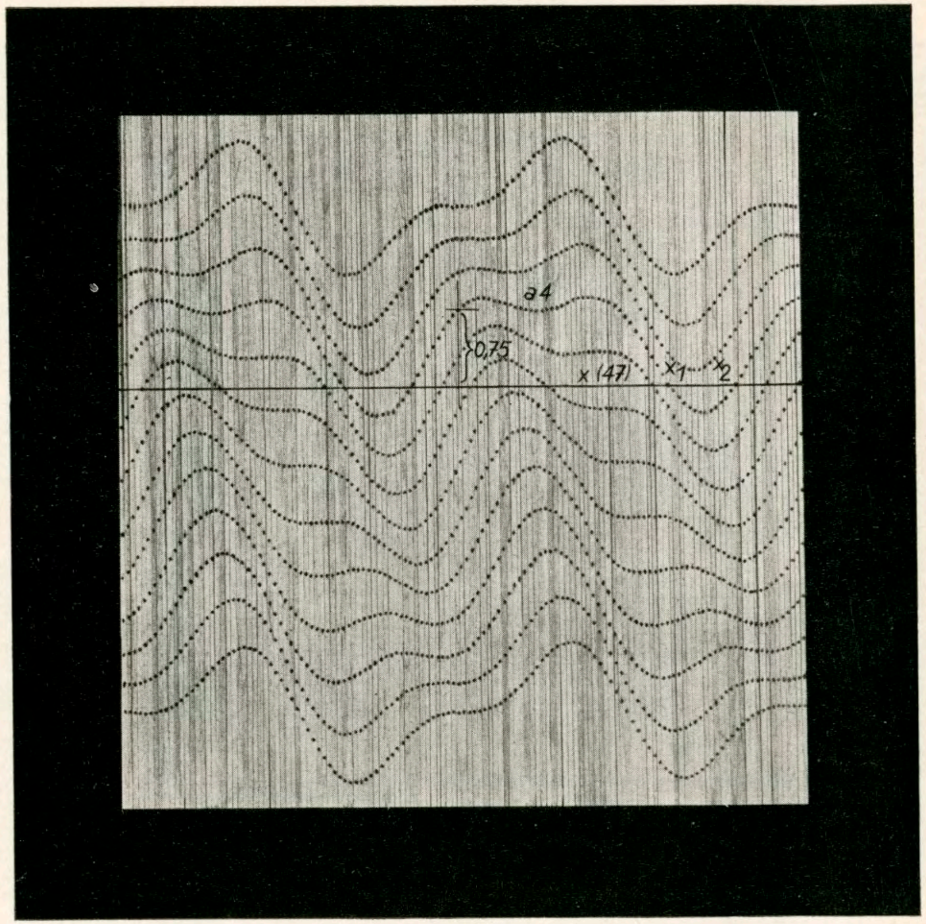


Bild 16